Расчет бомовского тока на плоский зонд, помещенный в плазму с немаксвелловской функцией распределения электронов по энергиям

А.В. Козырев

Институт сильноточной электроники СО РАН,
634055 Томск, Россия
e-mail: kozyrev@to.hcei.tsc.ru

Проведено теоретическое обобщение критерия Бома для минимальной скорости ионов, поступающих в слой объемного заряда из квазинейтральной плазмы, на случай немаксвелловской функции распределения электронов. Показано, что для определения средней энергии электронов в общем случае достаточно знать поведение зондовой характеристики только в окрестности точки, соответствующей нулевому потенциалу зонда относительно плазмы. При этом применение известного выражения для ионного тока насыщения на зонд остается приближенно справедливым и в случае произвольной функции распределения электронов по энергиям.

Введение

Зондовый метод исследования параметров газоразрядной плазмы широко применяется на практике [1,2]. Но его использование почти всегда связано со сложностями в интерпретации зондовой характеристики в целом, и предельных ее параметров, в частности. В первую очередь речь идет о так называемом ионном токе насыщения, который измеряется при сравнительно большом отрицательном электрическом потенциале на зонде относительно потенциала плазмы.

Практически всегда при интерпретации зондовых характеристик используют предположение о максвелловской функции распределения электронов по энергиям [1]. К сожалению, это предположение зачастую никак не обосновывается, хотя функция распределения электронов в слабоионизованной плазме только в исключительных случаях бывает максвелловской [2]. Поэтому было бы желательно иметь более общие выражения для зондовых ВАХ, при расчете которых можно было бы использовать произвольную функцию распределения. Частичному решению этой задачи и посвящена настоящая работа.

Задача расчета зондовой характеристики в общем случае достаточно сложна и не решена до сих пор. Ограничимся поэтому случаем отрицательно заряженного плоского зонда в плазме разряда низкого давления, когда движение заряженных частиц в пристеночном слое является бесстолкновительным. Математическое выражение этого приближения запишем в виде неравенства:

$$\lambda >> L_p ,$$

здесь λ – длина свободного пробега частиц, а L_p – ширина пристеночного слоя объемного заряда. Также будем полагать, что средняя энергия электронов $<\varepsilon>$ намного выше средней энергии ионов. Поэтому можно пренебречь распределением ионов по скоростям, то есть использовать для их описания приближение «холодных ионов». Напротив, нормированную на единицу функцию распределения электронов будем полагать известной и в общем случае немаксвелловской:

$$\int_0^\infty f(v)\cdot 4\pi v^2 dv = \int_0^\infty f\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}\right)\cdot\frac{4\pi}{m}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}d\varepsilon =$$

$$= \int_0^\infty f_\varepsilon(\varepsilon)\cdot\frac{4\pi}{m}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}d\varepsilon = 1 . \qquad (1)$$

Критерий Бома для ионной скорости

Для описания слоя объемного заряда поместим начало координат на границе между слоем и квазинейтральной плазмой, а электри-

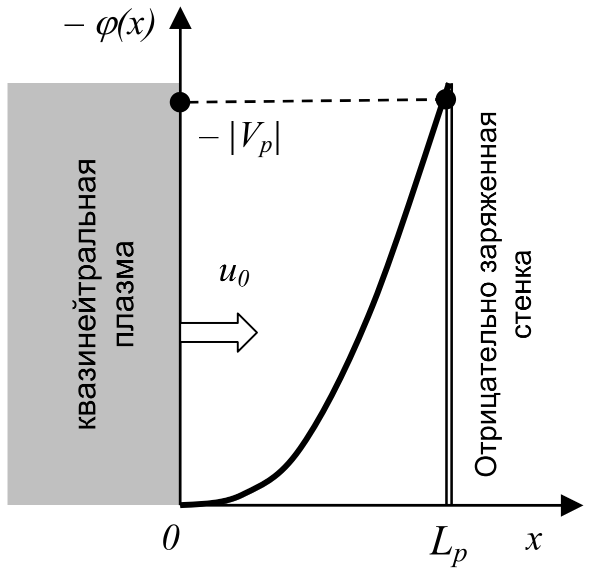

Рис.1. Обозначения и система координат в задаче о пристеночном слое объемного заряда.

ческий потенциал будем отсчитывать от потенциала плазмы, как показано на Рис.1. Для удобства будем в уравнениях потенциал считать положительным, хотя в реальности он ниже потенциала плазмы. Квазинейтральную плазму будем полагать двухкомпонентной (однозарядные ионы массой M и электроны массой m) с известной концентрацией $n(0)$ на границе слоя. Поскольку слой бесстолкновительный, то плотность ионного тока на стенку $J_i = en_iu_i$ не будет зависеть от координаты x.

Распределение электрического потенциала в слое объемного заряда в этом случае описывается уравнением Пуассона, в котором концентрация ионов определяется пройденной ими разностью потенциалов и начальной скоростью u_0, которую часто называют «бомовской», а концентрация электронов – их интегралом от функции распределения $f(\varepsilon)$ и потенциалом точки наблюдения φ:

$$\varepsilon_0 \frac{d^2\varphi}{dx^2} = e\left(n_i(\varphi) - n_e(\varphi)\right), \qquad (2)$$

$$n_i(\varphi) = \frac{n(0)u_0}{\sqrt{u_0^2 + \frac{2e\varphi}{M}}} = \frac{n(0)}{\sqrt{1 + \frac{2e\varphi}{Mu_0^2}}}, \qquad (3)$$

$$n_e(\varphi) = n(0) \cdot \int_0^\infty f_\varepsilon(\varepsilon + e\varphi) \cdot \frac{4\pi}{m}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}d\varepsilon. \qquad (4)$$

Для того чтобы уравнение Пуассона (2) давало монотонную зависимость $\varphi(x)$, необходимо обеспечить положительный знак левой части (2) при любых значениях φ. Из сравнения (3) и (4) видно, что благодаря экспоненциально быстрому спаду функции распределения электронов при больших энергиях, концентрация электронов с ростом φ будет изменяться быстрее, чем концентрация ионов. Поэтому левая часть будет заведомо неотрицательной, если с самого начала (φ=0) скорость спада электронной концентрации будет выше или равна скорости спада ионной концентрации. Это условие, которое впервые и использовал Бом [2, 3], может быть записано так:

$$-\left.\frac{dn_e}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} \geq -\left.\frac{dn_i}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}. \qquad (5)$$

Найдем скорость спада ионной концентрации непосредственным дифференцированием выражения (3):

$$-\frac{1}{en(0)}\left.\frac{dn_i}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = \frac{1}{Mu_0^2}. \qquad (6)$$

Скорость спада электронной концентрации можно найти дифференцированием выражения (4) и взятием получающегося интеграла по частям:

$$-\frac{1}{en(0)}\left.\frac{dn_e}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = -\int_0^\infty \frac{df_\varepsilon}{d\varepsilon} \cdot \frac{4\pi}{m}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}d\varepsilon =$$

$$= \int_0^\infty f_\varepsilon(\varepsilon) \cdot \frac{4\pi}{m} \cdot \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}d\varepsilon = \frac{1}{2}\left\langle \frac{1}{\varepsilon} \right\rangle \qquad (7)$$

Здесь и ниже угловые скобки обозначают усреднение величины по функции распределения.

Подставляя (6) и (7) в неравенство (5), получим обобщенный на случай произвольной функции распределения критерий Бома:

$$\frac{Mu_0^2}{2} \geq \frac{1}{<\varepsilon^{-1}>} = \varepsilon_B,$$

$$u_0 \ge \sqrt{\frac{2\varepsilon_B}{M}} = \sqrt{\frac{2}{M < \varepsilon^{-1} >}}. \qquad (8)$$

в котором введен характерный параметр: «энергия Бома» ε_B.

Естественно, что формула (8) при максвелловском распределении переходит в «классический» критерий Бома для скорости ионов. Действительно, для максвелловской функции имеем:

$$< \varepsilon^{-1} > = \int_0^\infty f_M(\varepsilon) \cdot \frac{4\pi}{m} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} d\varepsilon =$$

$$= \frac{4\pi}{m} \cdot \sqrt{\frac{2}{m}} \left(\frac{m}{2\pi k T_e} \right)^{3/2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT_e} \right) \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} =$$

$$= \frac{4}{kT_e\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{2}{kT_e}.$$

и подстановка этого результата в (8) дает известное выражение Бома:

$$u_0 \ge \sqrt{\frac{kT_e}{M}}.$$

Расчет тока ионов и электронов

Критерий (8) фактически требует существования промежуточного слоя между квазинейтральной плазмой и слоем объемного заряда, в котором ионы за счет разности потенциалов $\Delta\varphi_B$ должны приобрести некоторую минимальную кинетическую энергию. В рамках бесстолкновительного приближения этот «предслой» также является бесстолкновительным, но в отличие от слоя объемного заряда в «предслое» плазма остается квазинейтральной, несмотря на присутствующий градиент потенциала [Райзер]. В области предслоя должен падать потенциал $\Delta\varphi_B$, примерно равный:

$$e\Delta\varphi_B \approx \frac{1}{< \varepsilon^{-1} >} = \varepsilon_B.$$

Поскольку электроны в предслое также не испытывают столкновений, то для перепада концентрации плазмы (напомним, в предслое концентрации ионов и электронов равны) можно воспользоваться формулой (4):

$$\frac{n(0)}{n_0} \approx \int_0^\infty f_\varepsilon(\varepsilon + \varepsilon_B) \cdot \frac{4\pi}{m} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} d\varepsilon \simeq$$

$$\simeq \int_0^\infty \left[f_\varepsilon(\varepsilon) + \varepsilon_B \frac{df_\varepsilon}{d\varepsilon} \right] \cdot \frac{4\pi}{m} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} d\varepsilon = \frac{1}{2} \qquad (9)$$

Здесь n_0 –концентрация невозмущенной плазмы вдали от стенки (за пределами «предслоя»), а $n(0)$ – по-прежнему концентрация плазмы на границе с областью объемного заряда.

Теперь можно записать окончательное выражение для бомовского тока ионов на отрицательно заряженную стенку (ионный ток насыщения):

$$J_B \approx en(0)u_0 =$$

$$= en_0 \sqrt{\frac{2\varepsilon_B}{M}} \cdot \int_0^\infty f_\varepsilon(\varepsilon + \varepsilon_B) \cdot \frac{4\pi}{m} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} d\varepsilon \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{2} en_0 \sqrt{\frac{2\varepsilon_B}{M}} \qquad (10)$$

Как видно, единственный параметр, который определяет «бомовский ток» J_B – это «бомовская энергия» ε_B. Замечательно, что именно эту величину можно оценить по наклону вольтамперной зондовой характеристики только в одной точке.

Для того, чтобы показать это, необходимо вычислить электронный ток на стенку с заданным смещением – eV относительно потенциала плазмы в случае произвольной функции распределения. Очевидно, что на стенку попадут только те электроны, которые имеют достаточный запас направленной кинетической энергии:

$$\frac{mv_x^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \cos^2 \vartheta \ge eV, \quad \cos^2 \vartheta \ge eV / \varepsilon.$$

Тогда для плотности тока электронов получим общее выражение:

$$J_e(V) = en_0 \cdot 2\pi \int_0^{\cos^2 \vartheta > eV/\varepsilon} \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta \times$$

$$\times \int_{\sqrt{2eV/m}}^\infty v^3 f(v) dv =$$

$$= \pi e n_0 \int\limits_{\sqrt{2eV/m}}^{\infty} \left(v^2 - \frac{2eV}{m} \right) \cdot f(v) v dv =$$

$$= \frac{2\pi e n_0}{m^2} \int\limits_{eV}^{\infty} (\varepsilon - eV) f_\varepsilon(\varepsilon) d\varepsilon =$$

$$= \frac{2\pi e n_0}{m^2} \int\limits_{0}^{\infty} \varepsilon f_\varepsilon(\varepsilon + eV) d\varepsilon \qquad (11)$$

Нам в дальнейшем будет полезно значение плотности тока при нулевом смещении, которое широко известно:

$$J_e(0) = \frac{2\pi e n_0}{m^2} \int\limits_{0}^{\infty} \varepsilon f_\varepsilon(\varepsilon) d\varepsilon =$$

$$= \frac{e n_0}{2\sqrt{2m}} \int\limits_{0}^{\infty} \sqrt{\varepsilon} f_\varepsilon(\varepsilon) \frac{4\pi}{m} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} d\varepsilon =$$

$$= \frac{1}{4} e n_0 \left\langle \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} \right\rangle. \qquad (12)$$

Теперь из выражения (11) получим формулу для производной тока по потенциалу (наклон электронной ветви зондовой характеристики):

$$\frac{1}{e} \frac{dJ_e}{dV} = -\frac{2\pi e n_0}{m^2} \int\limits_{0}^{\infty} f_\varepsilon(\varepsilon + eV) d\varepsilon. \qquad (13)$$

Отсюда легко получить общее выражение для наклона зондовой характеристики в точке нулевого смещения:

$$-\frac{1}{e} \frac{dJ_e}{dV} \bigg|_{V=0} = \frac{2\pi e n_0}{m^2} \int\limits_{0}^{\infty} f_\varepsilon(\varepsilon) d\varepsilon =$$

$$= \frac{1}{2} e n_0 \left\langle \frac{1}{\sqrt{2m\varepsilon}} \right\rangle. \qquad (14)$$

Теперь из выражений (14) и (12) можно обосновать «экспериментальную оценку бомовской энергии»:

$$\varepsilon_B = \frac{1}{< \varepsilon^{-1} >} \simeq \frac{< \sqrt{\varepsilon} >}{< 1/\sqrt{\varepsilon} >} = -\frac{e J_e(0)}{\left(dJ_e / dV \right)_{V=0}}. \qquad (15)$$

Таким образом, определяя наклон зондовой характеристики и величину тока только в точке $V=0$, можно оценить среднюю энергию электронов даже для случая произвольной функции распределения. Конечно, есть еще одна проблема: как определить на зондовой характеристике нулевое смещение, при котором надо определять ток и наклон? Но эту проблему можно снять, используя для диагностики эмиссионный зонд: ток этого зонда резко возрастает, когда потенциал зонда хотя бы немного (обычно достаточно долей вольта) превышает локальный потенциал плазмы.

Обсуждение и выводы

Хотелось бы обратить внимание на следующее обстоятельство. Очень часто в качестве обоснования максвелловской функции распределения выдвигают тот аргумент, что наклон «логарифмической зондовой характеристики» $d(\ln J)/dV$ является примерно постоянным в широком диапазоне смещений, и по величине этого наклона определяют «температуру электронов». Если мы запишем с помощью (11) и (13) общее выражение для производной логарифма тока:

$$-\frac{1}{eJ_e} \frac{dJ_e}{dV} = \frac{\int\limits_{0}^{\infty} f_\varepsilon(\varepsilon + eV) d\varepsilon}{\int\limits_{0}^{\infty} \varepsilon f_\varepsilon(\varepsilon + eV) d\varepsilon}, \qquad (16)$$

то увидим, что наклон логарифмической ВАХ действительно может служить мерой средней энергии. Но примерное постоянство наклона ВАХ не указывает однозначно на максвелловскую функцию распределения. При других разумных функциях f этот наклон может оставаться также примерно постоянным.

Из сделанных расчетов и общего выражения (10) для «бомовского тока» видно, что оно довольно устойчиво к виду функции распределения. А потому без большой ошибки позволяет по ионному току насыщения (10) и известной средней энергии электронов (15) оценить величину концентрации плазмы.

Список литературы

[1] Подгорный И.М. Лекции по диагностике плазмы. М.: Атомиздат, 1968, Глава 2.

[2] Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, ГРФМЛ, 1987, Глава 11.

[3] Чен Ф. Введение в физику плазмы. М.: Мир, 1987, Глава 8.