

# Формирование униполярных и биполярных колец с релятивистскими электронами

В. А. Сыровой

Всероссийский электротехнический институт им. В. И. Ленина  
111250 Россия, Москва  
e-mail: agilim@vei.ru

Приведено решение задачи о формировании тороидальных бриллюэновских потоков, представляющих собой вырезку из течения релятивистских электронов или биполярного течения релятивистских электронов и нерелятивистских немоноэнергетических ионов в случае, когда все параметры пучка зависят от цилиндрического радиуса.

## Форма решения

Определим контур сечения пучка в меридиональной плоскости  $z$ ,  $R$  параметрическими уравнениями:

$$z = z_e(u), \quad R = R_e(u); \quad \alpha_e = R'_e, \quad \beta_e = z'_e. \quad (1)$$

Распрямляющее границу пучка отображение имеет вид:

$$z + iR = z_e(w) + iR_e(w), \quad w = u + i\nu. \quad (2)$$

Потенциал электрического поля  $\phi$  и ковариантная компонента векторного потенциала  $A_3 = RA_\psi \equiv A$  удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial z} \right) &= 0, \\ H_R &= -\frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial R}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $H_R$ ,  $H_z$  – компоненты напряженности магнитного поля. Эквипотенциальные поверхности  $A = const$  определяют конфигурацию силовых линий.

При рассмотрении потоков с собственным магнитным полем на границе пучка непрерывными должны быть не только  $\phi$  и  $d\phi/dn$ , но и компоненты  $H_R$ ,  $H_z$ .

Решение уравнений (3) будем искать в виде

$$f = f_i + S, \quad (4)$$

где  $f_i$  – соответствующая функция в пучке, а  $S$  удовлетворяет однородным условиям на его границе. Для функции  $S$  справедливо уравнение:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + a \frac{S}{R^2} = G, \quad (5)$$

причем в электростатической задаче  $a = 1/4$ ,  $G = -\rho\sqrt{R}$ , где  $\rho$  – плотность пространственного заряда, а для магнитного поля  $a = -3/4$ ,  $G = \rho v_\psi \sqrt{R}$ ,  $v_\psi$  – азимутальная скорость.

Решение уравнения (5) строится с использованием метода Римана [1] и имеет вид

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_i - \frac{1}{\sqrt{R}} \operatorname{Re} \int_0^\nu d\eta \int_0^{\nu-\eta} \rho \sqrt{R} h^2 F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda \right) d\xi, \\ A &= A_i + \sqrt{R} \operatorname{Re} \int_0^\nu d\eta \int_0^{\nu-\eta} \frac{\rho v_\psi}{\sqrt{R}} h^2 F \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1; \lambda \right) d\xi, \\ \lambda &= -\frac{r^2}{R(u+i\xi, \eta)R(u, \nu)}, \quad h^2 = \alpha^2 + \beta^2, \\ r^2 &= [R(u+i\xi, \eta) - R(u, \nu)]^2 + \\ &+ [z(u+i\xi, \eta) - z(u, \nu)]^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Гипергеометрические функции Гаусса  $F$  в интерграндах представляют собой функции Римана для уравнения (5),  $h^2(u, \nu)$  определяет конформную метрику криволинейной системы  $u, \nu$ . Функции  $u, \nu$ , попадая под интеграл, испытывают аналитическое продолжение по координате  $u \rightarrow u+i\xi$ , сопровождаемое заменой  $\nu \rightarrow \eta$ , как это показано на примере  $\lambda$  в (6);  $R(u, \nu)$ ,  $z(u, \nu)$  в выражении для  $\lambda$  – фиксированные координаты точки наблюдения.

## Параметры потока

*Униполярное течение.* Релятивистский цилиндрический бриллюэновский электронный поток рассматривался в [2] и [3]. Считая,

что при  $R = a$  потенциал в пучке равен  $\Phi_a$ , получим следующие выражения для параметров потока в релятивистской нормировке:

$$\begin{aligned} v_\psi &= -\frac{2\bar{R}}{1+\bar{R}^2}, \quad \Phi = \frac{2\bar{R}^2}{1-\bar{R}^2}, \quad \rho = \frac{8}{R_*^2} \frac{1+\bar{R}^2}{(1-\bar{R}^2)^3}, \\ H_{zs} &= \frac{4}{R_*} \left[ \frac{1}{(1-\bar{R}^2)^2} - \frac{1}{(1-\bar{a}^2)^2} \right], \\ R_* &= a \left( \frac{2+\Phi_a}{\Phi_a} \right)^{1/2}, \quad \bar{R} \equiv \frac{R}{R_*}, \\ \rho v_\psi &= -\frac{16}{R_*^2} \frac{\bar{R}}{(1-\bar{R}^2)^3}, \\ A &= 2R_* \left[ \frac{1}{1-\bar{R}^2} - \frac{\bar{R}^2}{(1-\bar{a}^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

*Биполярное течение.* Моноэнергетические релятивистские электроны и немонаэнергетические ионы с полной энергией  $\mathcal{H}_i$  и скоростью  $V_\psi$  описываются соотношениями:

$$\begin{aligned} v_\psi^2 &= -\frac{4R^\alpha}{(R^\alpha+1)^2}, \quad \Phi = \frac{2}{R^\alpha-1}, \quad \gamma = 1 + \Phi = \frac{R^\alpha+1}{R^\alpha-1}, \\ \rho - \rho_i &= \frac{2\alpha R^{\alpha-4}}{(R^\alpha-1)^3} \left[ (\alpha+1)R^\alpha + (\alpha-1) \right], \\ \rho_i &= \frac{\alpha^2/4 - 1}{R^2} \frac{R^\alpha+1}{R^\alpha-1}, \\ H_z &= \frac{2R^{\alpha/2-1}}{(R^\alpha-1)^2} \left[ \left( \frac{\alpha}{2} - 1 \right) R^\alpha + \left( \frac{\alpha}{2} + 1 \right) \right], \\ A &= \int R H_z dR, \\ V_\psi &= \frac{1}{2} \mu^2 H_z R - \left[ \frac{1}{4} \mu^4 H_z^2 R^2 - \mu^2 \frac{2\alpha R^\alpha}{(R^\alpha-1)^2} \right]^{1/2} \\ &\approx -\mu \frac{\sqrt{(-2\alpha) R^{\alpha/2}}}{R^\alpha-1}, \\ \mathcal{H}_i &= -\frac{1}{2} V_\psi^2 - \mu^2 \Phi, \quad \mu^2 = \eta_i / \eta_e, \quad \eta_e = \frac{e}{m}. \end{aligned} \quad (8)$$

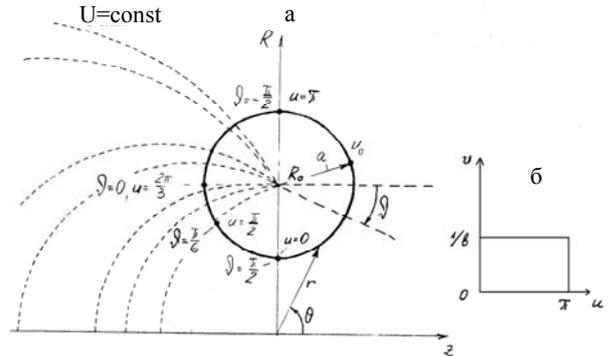
Решение (8) имеет смысл при  $0 < R < 1$ ,  $\alpha < -2$ . На оси скорость частиц и потенциал обращаются в нуль, суммарная плотность

$\rho - \rho_i$  равна нулю ( $|\alpha| > 4$ ), бесконечности ( $|\alpha| < 4$ ) или конечна ( $|\alpha| = 4$ ) при бесконечном значении плотности компонент.

### Решение задачи формирования

Связь криволинейных координат  $u, v$  с  $z, R$  и метрика в системе  $u, v$  для тороидального пучка с круглым сечением (рис.) задается формулами:

$$\begin{aligned} z &= -d \frac{2b \exp(v) \sin u}{1 + b^2 \exp(2v) + 2b \exp(v) \cos u}, \\ R &= d \frac{1 - b^2 \exp(2v)}{1 + b^2 \exp(2v) + 2b \exp(v) \cos u}, \\ h^2 &= \frac{4b^2 d^2 \exp(2v)}{\left[ 1 + b^2 \exp(2v) + 2b \exp(v) \cos u \right]^2}, \\ b &= \frac{1}{a} \left( R_0 - \sqrt{R_0^2 - a^2} \right), \quad d = \frac{1 - b^2}{1 + b^2} R_0. \end{aligned} \quad (9)$$



Обозначим комплекс в знаменателях выражений (9) через  $D$  и аналитически продолжим его:

$$\begin{aligned} D &= \text{Re } D + i \text{Im } D, \\ \text{Re } D &= 1 + b^2 \exp(2\eta) + 2b \exp(\eta) \cos u \text{ch } \xi, \\ \text{Im } D &= -2b \exp(\eta) \sin u \text{sh } \xi, \\ m^2 &= (\text{Re } D)^2 + (\text{Im } D)^2, \quad \text{tg } \vartheta = \text{Im } D / \text{Re } D, \\ R &= \text{Re } R + i \text{Im } R = d \left[ 1 - b^2 \exp(2\eta) \right] m^{-2} (\text{Re } D - i \text{Im } D), \\ m_1^2 &= (\text{Re } R)^2 + (\text{Im } R)^2, \\ \text{tg } \vartheta_1 &= \text{Im } R / \text{Re } R. \end{aligned} \quad (10)$$

*Униполярный пучок.* Множитель перед гипергеометрической функцией в формуле (6) для  $\Phi$  как функция аргументов  $u, v$  описывается соотношением:

$$\begin{aligned} \rho\sqrt{R} h^2 &= -\frac{8}{R_*^2} \frac{1+\bar{R}^2}{(1-\bar{R}^2)^3} \sqrt{R_*\bar{R}} \left[ \frac{4b^2 d^2 \exp(2\nu)}{D^2} \right] = \\ &= -32\sqrt{R_*} \bar{d}^{5/2} b^2 \sqrt{1-b^2 \exp(2\nu)} \exp(2\nu) D^{3/2} \times \\ &\times \frac{D^2 + d^2 [1-b^2 \exp(2\nu)]^2}{\left\{ D^2 - \bar{d}^2 [1-b^2 \exp(2\nu)]^2 \right\}^3}, \quad \bar{d} = \frac{d}{R_*}. \quad (11) \end{aligned}$$

Рассмотрим аналитическое продолжение  $u \rightarrow u + i\xi$ ,  $\nu \rightarrow \eta$  числителя и знаменателя дроби в (11):

$$\begin{aligned} D_1 &= D^2 + d^2 [1-b^2 \exp(2\eta)]^2 = \text{Re } D_1 + i \text{Im } D_1, \\ \text{Re } D_1 &= (\text{Re } D)^2 - (\text{Im } D)^2 + d^2 [1-b^2 \exp(2\eta)]^2, \\ \text{Im } D_1 &= 2\text{Re } D \text{Im } D; \\ D_2 &= D^2 - \bar{d}^2 [1-b^2 \exp(2\eta)]^2 = \text{Re } D_2 + i \text{Im } D_2, \\ \text{Re } D_2 &= (\text{Re } D)^2 - (\text{Im } D)^2 - \bar{d}^2 [1-b^2 \exp(2\eta)]^2, \\ \text{Im } D_2 &= 2\text{Re } D \text{Im } D; \\ M^2 &= (\text{Re } D_2)^2 + (\text{Im } D_2)^2, \\ \text{tg } T &= \text{Im } D_2 / \text{Re } D_2. \quad (12) \end{aligned}$$

Выражение для  $\varphi$  примет вид:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2\bar{R}^2}{1-\bar{R}^2} + \frac{32\bar{d}^{5/2} b^2}{\sqrt{R}} \int_0^\nu \sqrt{1-b^2 \exp(2\eta)} \exp(2\eta) \times \\ &\times \left[ \int_0^{\nu-\eta} m^{3/2} M^{-3} \left\{ \left[ \text{Re } D_1 \cos\left(\frac{3}{2}\vartheta - 3T\right) - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. - \text{Im } D_1 \sin\left(\frac{3}{2}\vartheta - 3T\right) \right] \times \right. \right. \\ &\left. \left. \times \text{Re } F - \left[ \text{Re } D_1 \sin\left(\frac{3}{2}\vartheta - 3T\right) + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + \text{Im } D_1 \cos\left(\frac{3}{2}\vartheta - 3T\right) \right] \text{Im } F \right\} d\xi \right] d\eta. \quad (13) \end{aligned}$$

Множитель в выражении для  $A$  в (6) перед гипергеометрической функцией определен формулой:

$$\begin{aligned} \frac{\rho\nu_w}{\sqrt{R}} h^2 &= -\frac{16}{R_*^2} \frac{\bar{R}}{(1-\bar{R}^2)^3} \frac{1}{\sqrt{R_*\bar{R}}} \left[ \frac{4b^2 d^2 \exp(2\nu)}{D^2} \right] = \\ &= -\frac{64b^2 \bar{d}^{5/2}}{\sqrt{R_*}} \sqrt{1-b^2 \exp(2\nu)} \exp(2\nu) \frac{\sqrt{D}}{D^3}. \quad (14) \end{aligned}$$

Переходы  $u \rightarrow u + i\xi$ ,  $\nu \rightarrow \eta$  приводят к следующему выражению для  $A$ :

$$\begin{aligned} A &= 2R_* \left[ \frac{1}{1-\bar{R}^2} - \frac{\bar{R}^2}{(1-\bar{a}^2)^2} \right] - \\ &- 64b^2 \bar{d}^{5/2} \sqrt{R} \int_0^\nu \sqrt{1-b^2 \exp(2\eta)} \exp(2\eta) \times \\ &\times \left\{ \int_0^{\nu-\eta} m^{1/2} M^{-3} \left[ \text{Re } F \cos\left(\frac{1}{2}\vartheta - 3T\right) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \text{Im } F \sin\left(\frac{1}{2}\vartheta - 3T\right) \right] d\xi \right\} d\eta. \quad (15) \end{aligned}$$

Алгоритмы вычисления при этих переходах аргумента  $\lambda$  гипергеометрической функции  $F$  и самой функции:  $\lambda \rightarrow \text{Re } \lambda + i \text{Im } \lambda$ ,  $F \rightarrow \text{Re } F + i \text{Im } F$  приведены в [4].

*Биполярный пучок.* Рассмотрим аналитическое продолжение суммарной плотности пространственного заряда:

$$\rho - \rho_i = \frac{2\alpha R^{\alpha-4}}{(R^\alpha - 1)^2} \left( \alpha \frac{R^\alpha + 1}{R^\alpha - 1} + 1 \right) =$$

$$= \text{Re}(\rho - \rho_i) + i \text{Im}(\rho - \rho_i),$$

$$R_1 = R^\alpha - 1 = \text{Re } R_1 + i \text{Im } R_1,$$

$$\text{Re } R_1 = m_1^\alpha \cos(\alpha\vartheta_1) - 1,$$

$$\text{Im } R_1 = m_1^\alpha \sin(\alpha\vartheta_1),$$

$$m_2^2 = (\text{Re } R_1)^2 + (\text{Im } R_1)^2,$$

$$\text{tg } \vartheta_2 = \text{Im } R_1 / \text{Re } R_1;$$

$$R_2 = R^\alpha + 1 = \text{Re } R_2 + i \text{Im } R_2,$$

$$\text{Re } R_2 = \text{Re } R_1 + 2, \quad \text{Im } R_2 = \text{Im } R_1,$$

$$m_3^2 = (\text{Re } R_2)^2 + (\text{Im } R_2)^2,$$

$$\text{tg } \vartheta_3 = \text{Im } R_2 / \text{Re } R_2;$$

$$R_3 = \alpha \frac{R^\alpha + 1}{R^\alpha - 1} + 1 = \text{Re } R_3 + i \text{Im } R_3,$$

$$\text{Re } R_3 = \alpha \frac{m_3}{m_2} \cos(\vartheta_3 - \vartheta_2) + 1,$$

$$\text{Im } R_3 = \alpha \frac{m_3}{m_2} \sin(\vartheta_3 - \vartheta_2);$$

$$\text{Re}(\rho - \rho_i) = Q_1 (\text{Re } R_3 \cos \theta_1 - \text{Im } R_3 \sin \theta_1),$$

$$\text{Im}(\rho - \rho_i) = Q_1 (\text{Re } R_3 \sin \theta_1 + \text{Im } R_3 \cos \theta_1),$$

$$Q_1 = 2\alpha m_1^{\alpha-4} m_2^{-2}, \quad \theta_1 = (\alpha - 4)\vartheta_1 - 2\vartheta_2. \quad (16)$$

Множитель перед гипергеометрической функцией в (6) имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma &= (\rho - \rho_i) \sqrt{R} h^2 = \operatorname{Re} \sigma + i \operatorname{Im} \sigma, \\ \operatorname{Re} \sigma &= Q m_1^{1/2} [\operatorname{Re}(\rho - \rho_i) \cos \theta_2 - \operatorname{Im}(\rho - \rho_i) \sin \theta_2], \\ \operatorname{Im} \sigma &= Q m_1^{1/2} [\operatorname{Re}(\rho - \rho_i) \sin \theta_2 + \operatorname{Im}(\rho - \rho_i) \cos \theta_2], \\ Q &= 4b^2 d^2 \exp(2\eta) m^{-2}, \quad \theta_2 = \frac{1}{2} \vartheta_1 - 2\vartheta. \end{aligned} \quad (17)$$

Выражение для потенциала описывается формулой:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{2}{R^\alpha - 1} - \frac{1}{\sqrt{R}} \int_0^v d\eta \int_0^{v-\eta} \\ &(\operatorname{Re} \sigma \operatorname{Re} F - \operatorname{Im} \sigma \operatorname{Im} F) d\xi. \end{aligned} \quad (18)$$

Для вычисления векторного потенциала необходимо найти аналитическое продолжение азимутальной компоненты плотности электронного тока:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \rho_i &= Q_2 \cos \theta_3, \quad \operatorname{Im} \rho_i = Q_2 \sin \theta_3, \\ Q_2 &= \left( \frac{\alpha^2}{4} - 1 \right) m_3 m_2^{-1} m_1^{-2}, \quad \theta_3 = \vartheta_3 - \vartheta_2 - 2\vartheta_1; \\ \operatorname{Re} \rho &= \operatorname{Re}(\rho - \rho_i) + \operatorname{Re} \rho_i, \quad \operatorname{Im} \rho = \operatorname{Im}(\rho - \rho_i) + \operatorname{Im} \rho_i; \\ \operatorname{Re} \rho v_\psi &= Q_3 (\operatorname{Re} \rho \cos \theta_4 - \operatorname{Im} \rho \sin \theta_4), \\ \operatorname{Im} \rho v_\psi &= Q_3 (\operatorname{Re} \rho \sin \theta_4 + \operatorname{Im} \rho \cos \theta_4), \\ Q_3 &= 2m_1^{\alpha/2} m_3^{-2}, \quad \theta_4 = \frac{1}{2} \alpha \vartheta_1 - 2\vartheta_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Для множителя перед гипергеометрической функцией получаем:

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho v_\psi \frac{h^2}{\sqrt{R}} = \operatorname{Re} \sigma + i \operatorname{Im} \sigma, \\ \operatorname{Re} \sigma &= Q m_1^{-1/2} (\operatorname{Re} \rho v_\psi \cos \theta_5 - \operatorname{Im} \rho v_\psi \sin \theta_5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \sigma &= Q m_1^{-1/2} (\operatorname{Re} \rho v_\psi \sin \theta_5 + \operatorname{Im} \rho v_\psi \cos \theta_5), \\ \theta_5 &= -\frac{1}{2} \vartheta_1 - 2\vartheta. \end{aligned} \quad (20)$$

Векторный потенциал из (6) описывается выражением

$$\begin{aligned} A &= \int R H_z dR + \sqrt{R} \int_0^v d\eta \int_0^{v-\eta} \\ &(\operatorname{Re} \sigma \operatorname{Re} F - \operatorname{Im} \sigma \operatorname{Im} F) d\xi. \end{aligned} \quad (21)$$

Приведенные решения абстрагированы от вопроса их физического получения. Заметим однако, что для подобного по характеру результата о сгустке в ловушке Пеннинга был найден способ его реализации [5].

## Литература

1. Сыровой В. А. Теория интенсивности пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
2. De Packh D. C., Ulrich P. B. Brillouin flow in relativistic beams // J. Electr. Contr. 1961. Vol. 10. № 2. P. 139.
3. Миллер Р. Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984.
4. Сапронова Т. М., Сыровой В. А. Параксиальное приближение проблемы формирования непараксиальных конического и тороидального электронных пучков с произвольным сечением // РЭ. 2012. Т. 57 (в печати).
5. Dubin D. H., O'Neil T. M. Trapped nonneutral plasmas, liquids, and crystals (the thermal equilibrium states) // Rev. Mod. Phys. 1999. Vol. 71. № 1. P. 87.