

Формирование ленточных биполярных пучков

В. М. Белкин, М. А. Завьялов, В. А. Сыровой

Всероссийский электротехнический институт им. В. И. Ленина
111250 Россия, Москва
e-mail: agilim@vei.ru

Построена одномерная теория ленточных биполярных пучков с релятивистскими электронами. Исследована адекватность одномерных моделей униполярных и биполярных потоков. Формирующие электроды для ленточного биполярного пучка описаны точными параметрическими соотношениями. Продемонстрирована неадекватность использования предельных ультрарелятивистских параметров пучка в диапазоне 5...500 МВ. Намечен путь учета краевых эффектов при формировании пучков с прямоугольным сечением.

Введение

В последнее время возрастает интерес к плазменным источникам ленточных пучков заряженных частиц [1–4]. Ленточные пучки с длиной поперечного сечения до 1 м и энергией газовых ионов до 50 кэВ перспективны в технологиях ионно-лучевой модификации и нанесения покрытий с ионно-лучевым сопровождением на листовые материалы с большой площадью поверхности, а также для обработки длинномерного режущего инструмента. При этом процессы перезарядки и ионизации атомов газа ускоренными ионами в области дрейфа приводят к появлению встречного потока электронов [2].

Электронные источники с плазменным катодом, генерирующие ленточные пучки при повышенном давлении (10^{-2} ... 10^{-1} мм рт. ст.), привлекательны для реализации технологии осаждения покрытий большой площади на основе плазмохимической реакции в объеме «плазменного листа» [1, 3]. Кроме того, образующаяся в области транспортировки пучковая плазма обеспечивает практически полную нейтрализацию зарядки изолированной мишени, что позволяет осуществлять электронно-лучевую обработку диэлектрических материалов [4].

В упомянутых устройствах образуются биполярные встречные потоки электронов и ионов между катодной плазмой и плазмой (пучковой) анода. Обратный ионный поток представляет главную особенность процесса эмиссии электронов из плазмы при повышенном давлении газа, так как он оказывает значительное влияние не только на электриче-

скую прочность ускоряющего промежутка, но и на условия горения разряда и установившиеся параметры плазмы [1].

Разработанные электронные источники, обеспечивающие генерацию ленточного пучка с сечением $250 \times 10 \text{ мм}^2$, энергией до 1 кэВ и током до 1 А в непрерывном режиме, позволяют получить пучковую плазму в форме «плазменного листа» с последующим использованием для инициирования плазмохимических реакций.

Во всех указанных выше случаях необходимы повышенные требования к форме пучка и высокой равномерности плотности тока по сечению. Возможное продвижение систем в область релятивистских скоростей электронов делает актуальным излучение биполярных электронно-ионно-оптических систем для формирования плоских потоков заряженных частиц в широком диапазоне энергий.

Эффект усиления электронного тока в плоском нерелятивистском биполярном диоде установлен в классической работе И. Ленгмюра [5]. Этот эффект характеризуется коэффициентом усиления $K_e = 1,865$. Биполярные потоки в нерелятивистских цилиндрических и сферическом диодах исследованы в работах [6, 8]. В экспериментах с квазиплоской геометрией, плазменным катодом и анодной плазмой, генерируемой самим пучком, а также с биполярным сферическим диодом с термокатодом и анодом, создаваемым газоразрядным источником плазмы типа дуоплазмотрон, подтверждена адекватность одномерных моделей: увеличение тока примерно в 2 раза при улучшении прохождения через анод в первом слу-

чае и совпадение с теоретически предсказанным коэффициентом усиления $K_e=3,75$ для геометрии эксперимента [9] во втором.

Не затрагивая эффектов, связанных с объемными процессами, работа касается проблемы формирования биполярных пучков, образованных релятивистскими электронами и многокомпонентным ионным потоком, а также границ адекватности одномерной теории униполярных и биполярных течений.

1. Биполярный диод

Рассмотрим встречное движение релятивистских электронов и нерелятивистских ионов, причем ионный поток образован ионами трех разновидностей с заданными соотношениями концентраций компонент. Использование интеграла энергии, уравнения сохранения тока для участвующих в движении частиц и объединяющего их уравнения Пуассона приводит к такому результату:

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = C_1 \frac{1+\tilde{\varphi}}{\sqrt{\varphi(2+\tilde{\varphi})}} - C_2 \frac{1}{\sqrt{2(\varphi_a-\varphi)}}. \quad (1)$$

Уравнение (1) и последующие соотношения записаны в безразмерных переменных, причем в качестве характерных длины L_* и скорости V_* выбраны расстояние между электродами L и скорость света c :

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{z}{L}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\varphi_*}, \quad \bar{E} = \frac{E}{E_*}, \\ \bar{J} &= \frac{J}{J_*}, \quad \bar{H} = \frac{H}{H_*}, \quad \bar{v} = \frac{v}{c}; \\ \varphi_* &= \frac{c^2}{\eta_e}, \quad E_* = \frac{c^2}{\eta_e L}, \quad J_* = \frac{c^3 \varepsilon_0}{\eta_e L^2}, \\ H_* &= \frac{c}{\eta_e \mu_0 L}, \quad \eta_e = \frac{e}{m}. \end{aligned} \quad (2)$$

Символ безразмерной величины (черту) в дальнейшем будем опускать; тильдой отмечены величины, исчезающие в нерелятивистском пределе; v , φ , J , E , H – скорость, потенциал, плотность тока, напряженность электрического и магнитного полей; ε_0 , μ_0 – константы системы СИ; η_e – удельный заряд электрона; нижним индексом e , i в дальнейшем будем отмечать электронную и ионную компоненты; нормировка осуществляется по

параметрам электрона, поэтому первый член в (1), имеющий смысл плотности пространственного заряда электронов, положителен.

Структура коэффициентов в уравнении (1) такова:

$$\begin{aligned} C_1 = \bar{J}_e &= \frac{J_e \eta_e L^2}{\varepsilon_0 c^3}, \quad C_2 = \bar{J}_{i1} \sqrt{\frac{\eta_e}{\eta_{i1}}} (1+k_2+k_3), \\ \bar{J}_{i1} &= \frac{J_{i1} \eta_e L^2}{\varepsilon_0 c^3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь J_{i1} – плотность тока основной ионной компоненты, а k_2 , k_3 – коэффициенты, устанавливающие соотношение концентраций.

Требую выполнения условий эмиссии в ρ -режиме на электродах, получаем связь между коэффициентами C_1 , C_2 и следующее выражение для электрического поля:

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 \sqrt{1+\varphi_a/2}, \\ E_e(\varphi) &= \sqrt{2J_e} \sqrt[4]{\varphi(2+\tilde{\varphi})}, \\ E_{ei}(\varphi, \varphi_a) &= \frac{d\varphi}{dz} = \sqrt{2} \left[C_1 \sqrt{\varphi(2+\tilde{\varphi})} + \right. \\ &\quad \left. + C_2 \left(\sqrt{2(\varphi_a-\varphi)} - \sqrt{2\varphi_a} \right) \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где индексом a отмечен потенциал анода, а E_e соответствует униполярному электронному потоку.

Интегрирование уравнения (4) приводит к зависимости $z = z(\varphi)$, определяющей распределение потенциала в плоском биполярном релятивистском диоде:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{2J_e}} \int_0^\varphi \left[\sqrt{\varphi(2+\tilde{\varphi})} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{2+\tilde{\varphi}_a} \left(\sqrt{\varphi_a-\varphi} - \sqrt{\varphi_a} \right) \right] d\varphi \equiv \\ &\equiv I_{ei}(\varphi, \varphi_a) / \sqrt{2J_e}. \end{aligned} \quad (5)$$

Записывая соотношение (5) на аноде $z=1$, $\varphi = \varphi_a$, получаем выражение для плотности электронного тока:

$$J_e = \frac{1}{2} I_{ei}^2(\varphi_a, \varphi_a). \quad (6)$$

Опуская второе слагаемое ($C_2 = 0$) в (4), (5), приходим к решению для плоского релятивистского униполярного диода:

$$J_e = \frac{1}{2} I_e^2(\varphi_a), \quad I_e = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{4\sqrt{\varphi(2+\tilde{\varphi})}}. \quad (7)$$

Выражение для C_2 из (3) с использованием (4) дает значения парциальных токов J_{ik} и суммарного ионного тока J_i :

$$\begin{aligned} J_{i1} &= J_e \sqrt{1 + \tilde{\varphi}_a/2} \sqrt{\eta_{i1}/\eta_e} / (1 + k_2 + k_3), \\ J_{ik} &= k_k J_{i1} \sqrt{\eta_{ik}/\eta_{i1}}, \quad J_i = \Sigma J_{ik} = \\ &= J_{i1} \left[1 + k_2 \sqrt{\eta_{i2}/\eta_{i1}} + k_3 \sqrt{\eta_{i3}/\eta_{i1}} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Из приведенных формул видно, что распределение потенциала и суммарной плотности пространственного заряда в биполярном диоде не зависит ни от числа ионных компонент, ни от их удельных зарядов. Суммарный ионный ток, напротив, зависит от этих параметров и анодного потенциала.

Время пролета t определяется формулой:

$$t = \int_0^\varphi \frac{(1 + \tilde{\varphi}) d\varphi}{\sqrt{\varphi(2 + \tilde{\varphi})} E_{ei}(\varphi, \varphi_a)}. \quad (9)$$

В ультрарелятивистском пределе функции $I_{ei}(\varphi, \varphi_a)$, $I_e(\varphi)$ задаются выражениями:

$$\begin{aligned} I_{ei} &= \sqrt{\varphi_a} \left[2\sqrt{1 - \bar{\varphi}} - (1 - \bar{\varphi}) + \right. \\ &\quad \left. + \arcsin(1 - 2\sqrt{1 - \bar{\varphi}}) + \frac{\pi}{2} \right], \\ I_e &= 2\sqrt{\bar{\varphi}}, \quad \bar{\varphi} \equiv \bar{\varphi}/\varphi_a. \end{aligned} \quad (10)$$

Коэффициент усиления электронного тока в случае биполярного диода следует из сравнения формул (6), (7):

$$K_e = (I_{ei}/I_e)^2 = K_e(\varphi_a). \quad (11)$$

В нерелятивистском случае кривая потенциала имеет перегиб при $z_* = 1/2$, $\bar{\varphi}_* = 1/2$, а суммарная плотность пространственного заряда в этом сечении обращается в нуль. При релятивистских скоростях приходим к кубическому уравнению для определения $\bar{\varphi}_*$:

$$2\bar{\varphi}_*^3 + \left(\frac{5}{\varphi_a} - \frac{3}{2} \right) \bar{\varphi}_*^2 + \frac{1}{\varphi_a} \left(\frac{4}{\varphi_a} - 3 \right) \bar{\varphi}_* - \frac{2}{\varphi_a^2} = 0. \quad (12)$$

В нерелятивистском ($\varphi_a \rightarrow 0$) и ультрарелятивистском ($\varphi_a \rightarrow \infty$) пределах получаем $\bar{\varphi}_* = 1/2$ и $\bar{\varphi}_* = 3/4$ [10] соответственно. Ультрарелятивистское значение координаты z_* следует из формулы (10):

$$\begin{aligned} z_* &= \frac{I_{ei}(\varphi_*, \varphi_a)}{I_{ei}(\varphi_a, \varphi_a)} = \frac{I_{ei}(3/4 \varphi_a, \varphi_a)}{I_{ei}(\varphi_a, \varphi_a)} = \\ &= \frac{\sqrt{\varphi_a} (\pi/2 + 1)}{\sqrt{\varphi_a} \pi} = \frac{2 + \pi}{2\pi} \approx 0,81831. \end{aligned} \quad (13)$$

Коэффициент усиления K_e электронного тока от своего нерелятивистского значения 1,865 очень медленно приближается к ультрарелятивистскому пределу, приведенному в [10] и следующему из формул (10), (11):

$$\begin{aligned} I_{ei}(\varphi_a, \varphi_a) &= (2\sqrt{\varphi_a}) \frac{\pi}{2}, \quad I_e(\varphi_a) = \\ &= 2\sqrt{\varphi_a}, \quad K_e = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

На рис. 1 представлено поведение функции $K_e(\varphi_a)$. На рис. 2 приведены функции $\varphi(\bar{z})$, $E(\bar{z})$, $\rho(\bar{z})$ для $\varphi_a = 5$. Смещение плоскости с $\rho = 0$ к аноду и нарушение симметрии нерелятивистской картины уже явно проявились на рис. 2.

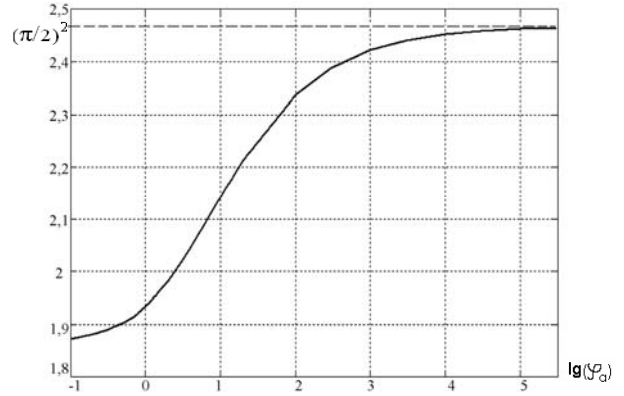


Рис. 1.

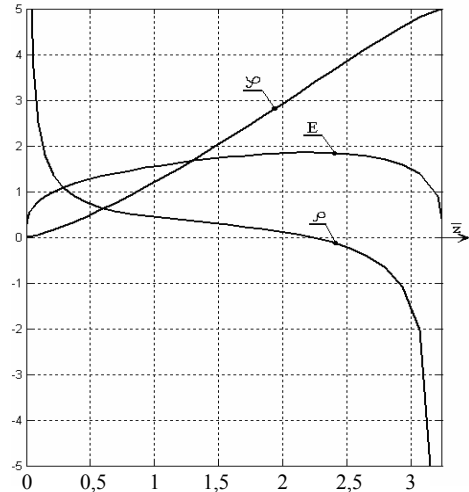


Рис. 2.

2. Адекватность теории униполярного релятивистского диода

Вопрос о справедливости теории одномерных электронных потоков рассматривался в ряде работ [11–13]. Для его решения необходимо рассмотреть цилиндрический пучок с радиусом R_0 , вырезанный из потока в плоском диоде. При этом предполагается, что дефокусирующее действие пространственного заряда по известной методике компенсировано соответствующими внешними формирующими электродами. Некоторые из приведенных оценок влияния собственного азимутального и внешнего продольного магнитного поля на такой пучок оставляют чувство неудовлетворенности. Прежде чем переходить к обсуждению аналогичной проблемы в биполярном диоде, рассмотрим упомянутые концепции.

В работе [11] сформулированы ограничения на относительные размеры R_0/L пучка в нерелятивистском и релятивистском случаях, исходя из требования малости силы Лоренца со стороны собственного магнитного поля, по сравнению с силой ускоряющего электрического поля диода. Соответствующие неравенства со знаком «много меньше», естественным при рассмотрении этой проблемы, имеют вид*

$$\frac{R_0}{L} \ll \frac{3}{\varphi}, \quad \frac{R_0}{L} \ll \frac{4\gamma}{\sqrt[4]{\gamma^2-1}} \frac{1}{I_e}, \quad \gamma = 1 + \varphi. \quad (15)$$

В монографии [12] ограничение на величину R_0/L получено для узких пучков вблизи продольной оси, «где собственные поля малы», исходя из требования примерного равенства радиального и продольного импульсов электрона на аноде:

$$\frac{R_0}{L} \lesssim \begin{cases} \frac{9}{4} \frac{\sqrt{\gamma_a+1}}{\gamma_a-1}, & \gamma_a < 3, \\ \frac{1}{\gamma_a} \sqrt{\frac{\gamma_a^2-1}{2}}, & \gamma_a > 1. \end{cases} \quad (16)$$

Ультрарелятивистское соотношение, очевидно, можно записать как $R_0/L \lesssim 1/\sqrt{2}$.

* Похожая на первое неравенство (14) оценка: $R_0/L \ll 2/\varphi$ без вывода приведена в [14] для любых значений потенциала.

При равенстве импульсов на аноде траектория подходит к нему под углом в 45° : это уже далеко зашедшее отклонение от одномерности. Этот дефект легко устранить, заменив в (16) символ \lesssim символом \ll . Однако результаты (16) основаны на выражении для радиального импульса $p_R = \kappa^2 z R$, $\kappa^2 = \text{const}$: для него уравнение относительно p_z , при принятых авторами предположениях, принимает вид уравнения для одномерного релятивистского диода, но это выражение не удовлетворяет уравнению для p_R (уравнения (20), (21) в [14]), которое при тех же предположениях выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2 p_R}{dz^2} - \frac{2\kappa^2}{\sqrt{\gamma^2-1}} p_R = 0. \quad (17)$$

Получение одномерного уравнения из соотношения $\text{rot rot } \vec{p} = -\vec{v} \Delta \varphi = -\vec{v} \Delta \gamma$ невозможно по той причине, что $\text{rot } \vec{p} = -\vec{H}$ имеет отличную от нуля компоненту $\partial p_R / \partial z - \partial p_z / \partial R = -H_\varphi$ только для двумерных течений, а в одномерном случае тождественно равен нулю.

При исследовании узких пучков для определения радиального импульса и отклонения траектории от прямой было бы естественно использовать параксиальное уравнение с потенциалом на оси, соответствующим плоскому диоду:

$$\begin{aligned} (\gamma^2-1) \frac{d^2 R}{d\bar{z}^2} + \gamma \sqrt{2} \sqrt[4]{\gamma^2-1} \frac{dR}{d\bar{z}} + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\sqrt{\gamma^2-1}} R &= \frac{1}{\sqrt{\gamma^2-1} R}, \\ \frac{d^2 \gamma}{d\bar{z}^2} &= \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2-1}}, \quad \bar{z} = \sqrt{J} z. \end{aligned} \quad (18)$$

Видно, что уравнение (18) также не имеет линейного по z решения. Следует, однако, заметить, что нас интересуют не обязательно узкие пучки.

Результаты работы [13] основаны на понятии критического тока I_* , обсуждаемого в [15]. Значение I_* определяется из требования равенства ларморовского радиуса периферического электрона, скорость которого соответствует потенциалу анода, и межэлектродного расстояния. Ограничение на относительные

размеры пучка определяются требованием $I < I_*$:

$$\frac{R_0}{L} < \frac{I_0}{\pi} \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{a(\gamma - 1)^n}, \quad I_* = I_0 \sqrt{\gamma^2 - 1} \frac{R_0}{L}, \quad (19)$$

где $I_0 \approx 8,5$ кА; a, n – введенные в [12] параметры, при помощи которых аппроксимируется точное решение в различных диапазонах γ .

Для учета влияния внешнего продольного магнитного поля H_z , препятствующего компрессии потока за счет собственного азимутального магнитного поля H_ψ , на границе пучка принято условие:

$$H_z > H_\psi. \quad (20)$$

Слабые неравенства (19), (20) представляются неубедительными при оценке влияния собственного и внешнего магнитных полей.

В табл. 1 при нескольких значениях γ приведены ограничения на относительные размеры пучка в соответствии с работами [11–14].

γ	[11]	[12]	[13]	[14]	Данная работа
2	$R_0/L \ll 5,6$	$R_0/L < 3,9$	$R_0/L < 6$	$R_0/L \ll 1$	$R_0/L \ll 7,1$
4	$R_0/L \ll 3,5$	-	$R_0/L < 3$	$R_0/L \ll 0,33$	$R_0/L \ll 4,0$
10	$R_0/L \ll 2,7$	$R_0/L < 0,7$	$R_0/L < 1,8$	$R_0/L \ll 0,11$	$R_0/L \ll 1,6$

Из оценок в табл. 1 наиболее физической представляется первая, однако примем во внимание тот факт, что малая сила на больших расстояниях может давать заметный эффект. Чтобы решить этот вопрос, достаточно рассмотреть уравнение для радиального импульса на границе пучка, не требуя его параксиальности и предполагая, что продольное распределение потенциала соответствует одномерному случаю. Заметное отклонение радиуса пучка R от R_0 будет служить индикатором необходимости отказаться от одномерной модели. В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{d}{dt} \left[(1 + \tilde{\varphi}) \frac{dR}{dt} \right] = -H_\psi \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = J_e \frac{1 + \tilde{\varphi}}{\sqrt{\varphi(2 + \tilde{\varphi})}}; \quad H_\psi = \frac{1}{2} J_e R_0. \quad (21)$$

После преобразований уравнения (21) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{R}}{d\bar{t}} &= -\frac{1}{2} \frac{\bar{z}}{1 + \tilde{\varphi}}, & \frac{d\varphi}{d\bar{t}} &= \frac{\sqrt{\varphi(2 + \tilde{\varphi})}}{1 + \tilde{\varphi}} \bar{E}_e(\varphi), \\ \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} &= \frac{\sqrt{\varphi(2 + \tilde{\varphi})}}{1 + \tilde{\varphi}}, & \bar{E}_e &= \frac{E_e}{\sqrt{J_e}}, & \bar{R} &= \frac{R}{R_0}; \\ \bar{R}(0) &= 1, & \bar{z}(0) &= \varphi(0) = 0, \\ \bar{z} &= \sqrt{J_e} z, & \bar{t} &= \sqrt{J_e} t. \end{aligned} \quad (22)$$

Из уравнений (22) следует, что в случае цилиндрического пучка, для которого $H_\psi \sim R_0$, относительное отклонение траектории зависит только от потенциала и не связано с радиусом пучка, расстоянием между электродами и плотностью тока.

Для нерелятивистского диода система (22) имеет точное решение:

$$\bar{R} = 1 - \frac{1}{6} \varphi. \quad (23)$$

Таблица 1

Сравнение формулы (23) с результатом интегрирования системы (22) при $v \ll 1$ дает следующие пары значений $\delta = (R_0 - R)/R_0 = 1 - \bar{R} = \Delta R/R_0 \equiv \Delta \bar{R}$: для $\varphi \sim 0,2$ имеем $\delta \sim 3,29$ % против 3,99; для $\varphi \sim 0,09$ получаем $\delta \sim 1,5$ против 1,97.

Условие малого отклонения от одномерного течения определяется неравенством

$$\frac{\Delta R}{L} \ll 1, \quad \frac{R_0}{L} \ll \frac{1}{1 - \bar{R}} \equiv D. \quad (24)$$

В нерелятивистском случае из (23), (24) получаем неравенство, правая часть которого в 2 раза больше, чем в (15):

$$\frac{R_0}{L} \ll \frac{6}{\varphi_a}. \quad (25)$$

Из сравнения траекторных оценок по уравнениям (22) и оценок по формуле (17)

видно, что значения D близки при $\varphi \sim 2$ и примерно в 2 раза различаются при нерелятивистских скоростях и при стремлении к ультрарелятивистскому пределу: оценки по магнитному полю оказываются более жесткими, чем траекторные оценки при $\varphi \lesssim 2$, и меняются с ними местами в диапазоне $\varphi = 2 \dots 10$.

При существенном отличии \bar{R} от единицы модель не описывает реальную траекторию. Однако на уровне оценок периферический электрон под действием собственного магнитного поля и электрического поля плоского диода представляется более подходящей моделью, чем эта частица [13], движущаяся по ларморовскому радиусу со скоростью, соответствующей анодному потенциалу, даже при усилении неравенства с «меньше» на «много меньше».

3. Адекватность теории биполярного релятивистского диода

Вопрос о справедливости одномерной модели биполярного потока следует рассматривать с тех же позиций, что и теорию релятивистского электронного диода. В отличие от него оценка отношения сил $D = E/\nu H_\psi$ со стороны электрического и магнитного полей не имеет смысла, так как на катоде, где $E \sim z^{1/3}$, $\nu \sim z^{2/3}$, оно стремится к бесконечности, а на аноде, где $E = 0$, $\nu = \text{const}$ равно нулю.

Напомним, что возмущенная траектория тем ближе к реальной, чем меньше значение относительной ошибки δ . Несоответствие при больших отклонениях происходит за счет двух факторов: нарушения одномерности течения и не учитываемого изменения распределения потенциала; появления области чисто ионного потока над испытывавшей компрессию электронной траекторией.

Уравнения, определяющие возмущенную траекторию, получаются из системы (22) при замене $\bar{E}_e(\varphi)$ на $\bar{E}_{ei}(\varphi, \varphi_a)$. Ситуация со справедливостью одномерной теории биполярного диода существенно хуже, чем в случае одномерного электронного потока. Так, относительная ошибка δ при $\varphi_a = 0,5$; 5 в первом

случае составляет 12,8 и 80 % против 8 и 23 %. Таким образом, вопрос о стабилизирующем влиянии внешнего магнитного поля становится еще более важным.

Система уравнений, позволяющая оценить этот эффект, имеет вид (R, ψ, z – цилиндрические координаты):

$$\begin{aligned} \bar{R}\ddot{\psi} + 2\dot{\bar{R}}\dot{\psi} + \frac{1}{1+\tilde{\varphi}}(P\ddot{R} + \bar{R}\dot{\varphi}\dot{\psi}) &= 0, \\ \ddot{\bar{R}} - \dot{\bar{R}}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{1+\tilde{\varphi}}\left(\frac{1}{2}\dot{z} + \dot{\varphi}\dot{R} - P\dot{R}\dot{\psi}\right) &= 0, \\ \dot{z} = \frac{\sqrt{\varphi(2+\tilde{\varphi})}}{1+\tilde{\varphi}}, \quad \dot{\varphi} = E_{ei}(\varphi, \varphi_a)\dot{z}, \\ \dot{\varphi} \equiv d\varphi/d\bar{t}, \quad P = H_z/\sqrt{J_e}. \end{aligned} \quad (26)$$

Система (26) с параметром P описывает движение частицы на границе пучка под действием продольного электрического поля биполярного диода, собственного азимутального магнитного поля H_ψ и внешнего продольного поля H_z . Начальные условия для \bar{R}, ψ определены формулами:

$$\begin{aligned} \bar{R}(0) &= 1, \quad \dot{\bar{R}}(0) = 0, \\ \psi(0) &= 0, \quad \dot{\psi}(0) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Из уравнений (26) видно, что в случае биполярного диода относительное изменение радиуса \bar{R} при $P = 0$ зависит только от потенциала анода.

В табл. 2, 3 приведены результаты (значения $\bar{R} = \bar{R}(P, \varphi_a)$) интегрирования системы (26) для электронного и биполярного диодов соответственно. Эффект воздействия внешнего магнитного поля для двух этих случаев естественно сравнивать для пучков с одинаковым полным током и пучков с одинаковым начальным радиусом.

Параметр P в (26) можно представить в виде

$$P = k \frac{H_z}{H_\psi}, \quad k = \frac{1}{2L} \left(\frac{I}{\pi J_*} \right)^{1/2}, \quad (28)$$

где коэффициент k не зависит от типа потока.

Таблица 2

P	φa					
	0,1	0,5	1	2	5	10
0	0,9838	0,9246	0,8612	0,7583	0,5471	0,3322
0,1	0,9838	0,9246	0,8613	0,7586	0,5478	0,3336
0,2	0,9838	0,9247	0,8617	0,7594	0,5499	0,3378
0,3	0,9839	0,9250	0,8623	0,7607	0,5535	0,3447
0,4	0,9839	0,9253	0,8631	0,7626	0,5583	0,3541
0,5	0,9839	0,9257	0,8641	0,7650	0,5645	0,3657
0,6	0,9840	0,9262	0,8654	0,7678	0,5718	0,3792
0,7	0,9841	0,9268	0,8669	0,7711	0,5801	0,3944
0,8	0,9841	0,9275	0,8685	0,7749	0,5895	0,4109
0,9	0,9842	0,9283	0,8704	0,7791	0,5997	0,4285
1	0,9843	0,9291	0,8725	0,7836	0,6107	0,4470
2	0,9855	0,9411	0,9002	0,8413	0,7353	0,6364
3	0,9875	0,9562	0,9315	0,8986	0,8370	0,7706
4	0,9897	0,9699	0,9563	0,9370	0,8940	0,8408
5	0,9919	0,9800	0,9715	0,9573	0,9226	0,8792
6	0,9939	0,9863	0,9797	0,9680	0,9407	0,9063
7	0,9954	0,9897	0,9843	0,9752	0,9540	0,9256
8	0,9966	0,9918	0,9876	0,9807	0,9632	0,9391
9	0,9974	0,9934	0,9901	0,9844	0,9697	0,9495
10	0,9978	0,9946	0,9920	0,9871	0,9748	0,9575
12	0,9984	0,9963	0,9942	0,9908	0,9818	0,9687
14	0,9988	0,9972	0,9957	0,9931	0,9863	0,9760
16	0,9991	0,9979	0,9967	0,9947	0,9893	0,9811
20	0,9994	0,9986	0,9979	0,9966	0,9930	0,9874
30	0,9997	0,9994	0,9990	0,9985	0,9968	0,9939

Таблица 3

P \ φa	φa					
	0,1	0,5	1	2	5	10
0	0,9728	0,8715	0,7625	0,5810	0,1990	–
0,1	0,9728	0,8716	0,7628	0,5818	0,2021	0,1594
0,2	0,9728	0,8720	0,7637	0,5841	0,2109	0,1549
0,3	0,9729	0,8726	0,7652	0,5878	0,2249	0,1520
0,4	0,9729	0,8734	0,7673	0,5930	0,2430	0,1528
0,5	0,9730	0,8745	0,7700	0,5995	0,2645	0,1591
0,6	0,9732	0,8757	0,7732	0,6073	0,2884	0,1715
0,7	0,9733	0,8772	0,7769	0,6161	0,3141	0,1894
0,8	0,9735	0,8789	0,7811	0,6260	0,3410	0,2117
0,9	0,9737	0,8808	0,7857	0,6367	0,3687	0,2373
1	0,9739	0,8828	0,7908	0,6481	0,3967	0,2651
2	0,9769	0,9104	0,8536	0,7767	0,6497	0,5429
3	0,9813	0,9412	0,9131	0,8759	0,7990	0,7088
4	0,9858	0,9646	0,9502	0,9263	0,8661	0,7915
5	0,9899	0,9782	0,9678	0,9488	0,9031	0,8461
6	0,9930	0,9848	0,9764	0,9625	0,9290	0,8833
7	0,9951	0,9884	0,9822	0,9722	0,9454	0,9080
8	0,9964	0,9910	0,9865	0,9784	0,9568	0,9263
9	0,9971	0,9930	0,9986	0,9826	0,9653	0,9397
10	0,9976	0,9944	0,9912	0,9859	0,9714	0,9498
12	0,9983	0,9963	0,9939	0,9901	0,9798	0,9639
14	0,9988	0,9972	0,9955	0,9927	0,9850	0,9729
16	0,9991	0,9979	0,9966	0,9944	0,9884	0,9790
20	0,9994	0,9986	0,9978	0,9964	0,9925	0,9863
30	0,9997	0,9994	0,9990	0,9984	0,9967	0,9939

Из формул (28) следует, что при одинаковом полном токе I униполярный и биполярный пучки ведут себя одинаково при одинаковом отношении внешнего и собственного магнитных полей. Отношение внешних полей $(H_z)_{ei}/(H_z)_e$, обеспечивающих этот эффект, следует из выражений:

$$P_e = k \left(\frac{H_z}{H_\psi} \right)_e, \quad P_{ei} = k \left(\frac{H_z}{H_\psi} \right)_{ei},$$

$$\frac{(H_z)_{ei}}{(H_z)_e} = \frac{(H_\psi)_{ei}}{(H_\psi)_e} = \frac{R_{ei}}{R_e} \frac{I_{ei}^2}{I_e^2} = K_e \frac{R_{ei}}{R_e},$$

$$\frac{R_{ei}}{R_e} = \left(\frac{I}{\pi J_{ei}} \right)^{1/2} / \left(\frac{I}{\pi J_e} \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{J_e}{J_{ei}} \right)^{1/2} = \left(\frac{I_e^2}{I_{ei}^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{K_e}},$$

$$\frac{(H_z)_{ei}}{(H_z)_e} = \sqrt{K_e}. \quad (29)$$

Таким образом, для одинакового поведения пучков при равенстве полных токов I внешнее магнитное поле для биполярного пучка должно быть в $\sqrt{K_e}$ раз больше.

Для пучков с одинаковым радиусом можно посмотреть, что будет с электронным пучком в том же магнитном поле, которое приложено к биполярному потоку:

$$P_e = \frac{1}{2L} \left(\frac{I_e}{\pi J_*} \right)^{1/2} \frac{H_z}{(H_\psi)_e} \left[\frac{(H_\psi)_{ei}}{(H_\psi)_{ei}} \left(\frac{I_{ei}}{I_{ei}} \right)^{1/2} \right] =$$

$$= P_{ei} \frac{(H_\psi)_{ei}}{(H_\psi)_e} \left(\frac{I_e}{I_{ei}} \right)^{1/2} =$$

$$= P_{ei} \frac{I_{ei}^2}{I_e^2} \left(\frac{I_e}{I_{ei}} \right)^{1/2} = P_{ei} K_e \frac{1}{\sqrt{K_e}} = \sqrt{K_e} P_{ei};$$

$$(H_\psi)_{ei} = \frac{1}{4} \left(\frac{R_0}{L} \right) I_{ei}^2, \quad (H_\psi)_e = \frac{1}{4} \left(\frac{R_0}{L} \right) I_e^2,$$

$$\frac{(H_\psi)_{ei}}{(H_\psi)_e} = \frac{I_{ei}^2}{I_e^2} = K_e. \quad (30)$$

В табл. 4 для пучков с расстоянием между электродами 15 см, $\varphi_a=0,7$; (350, 500 кВ) и токами биполярного пучка 120 и 500 А соответственно* приведены значения \bar{R} при воздействии на биполярный пучок внешнего магнитного поля $H_z = k_H (H_\psi)_{ei}$ и того же магнитного поля на электронный пучок с тем же радиусом.

Таблица 4

K _H	Φ _a			
	0,7		1,0	
	P _{ei} =0,085K _H	P _{ei} =0,118K _H	P _{ei} =0,17K _H	P _{ei} =0,236K _H
0	0,8260	0,8979	0,7617	0,8612
5	0,8294	0,9005	0,7827	0,8766
10	0,8391	0,9078	0,8331	0,9117
15	0,8538	0,9185	0,8884	0,9461
20	0,8717	0,9312	0,9307	0,9681

При одинаковых радиусах и одинаковом отношении внешнего и собственного магнитных полей имеем:

$$P_e = \frac{1}{2L} \left(\frac{I_e}{\pi J_*} \right)^{1/2} \left(\frac{H_z}{H_\psi} \right)_e,$$

$$P_{ei} = \frac{1}{2L} \left(\frac{I_{ei}}{\pi J_*} \right)^{1/2} \left(\frac{H_z}{H_\psi} \right)_{ei},$$

$$\frac{P_e}{P_{ei}} = \left(\frac{I_e}{I_{ei}} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{K_e}}. \quad (31)$$

Оценки, приведенные в разделах 2, 3 для цилиндрического пучка, сохраняют свой смысл по порядку величин и для ленточных потоков. Например, аналитическое решение (23) в последнем случае имеет вид

$$\bar{y} = \frac{y}{y_0} = 1 - \frac{1}{3} \varphi.$$

4. Формирующие электроды для ленточного пучка

Параметрические уравнения эквипотенциальных поверхностей в лапласовской области получим, аналитически продолжая обе части равенства (5), которое удобно переписать в виде

* Характерные значения L , φ_a , I в численных примерах приблизительно те же, что у релятивистского инжектора [7] и его перспективной модели.

$$\bar{z} = \sqrt{\frac{2J_e}{\varphi_a}} z = \int_0^{\bar{\varphi}} f(\bar{\varphi}; \varphi_a) d\bar{\varphi} \equiv$$

$$\equiv I_{ei}(\bar{\varphi}; \varphi_a), \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\varphi_a},$$

$$f(\bar{\varphi}; \varphi_a) = \left[\sqrt{\bar{\varphi}(2/\varphi_a + \bar{\varphi})} + \sqrt{2/\varphi_a + 1} (\sqrt{1 - \bar{\varphi}} - 1) \right]^{-1/2}.$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} \bar{z} + iy &= \int_0^{\bar{\varphi} + i\psi} f(t; \varphi_a) dt = \\ &= \int_0^{\bar{\varphi}} f(t; \varphi_a) dt + \int_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi} + i\psi} f(t; \varphi_a) dt = \\ &= \int_0^{\bar{\varphi}} f(t; \varphi_a) dt + i \int_0^{\psi} f(\bar{\varphi} + i\tau; \varphi_a) d\tau, \end{aligned}$$

$$\bar{z} = z_0 - \text{Im} \int_0^{\psi} f(\bar{\varphi} + i\tau; \varphi_a) d\tau,$$

$$\bar{y} = \text{Re} \int_0^{\psi} f(\bar{\varphi} + i\tau; \varphi_a) d\tau,$$

$$z_0 = \int_0^{\bar{\varphi}} f(t; \varphi_a) dt. \quad (33)$$

При фиксированном значении $\bar{\varphi} = \varphi_*$ формулы (33) определяют эквипотенциаль уравнениями $\bar{z} = \bar{z}(\psi)$, $\bar{y} = \bar{y}(\psi)$. В зависимости от значения φ_* интегралы в (33) могут иметь особенности, для учета которых необходимо построить соответствующие асимптотики.

На рис. 3 приведена картина эквипотенциальных поверхностей, соответствующая режиму диода, иллюстрированному рис. 2.

В нерелятивистском случае существует плоскость симметрии $\bar{\varphi} = 0,5$ в середине межэлектродного интервала [16]. При релятивистских скоростях прианодная область сильно «угнетена» электронами. Плоская эквипотенциаль-сепаратриса сменилась кривой со значением $\bar{\varphi}_*$ из уравнения (12) и нулевой кривизной на границе потока. Дифференциальное уравнение эквипотенциали имеет вид:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\text{Re } f}{-\text{Im } f}. \quad (34)$$

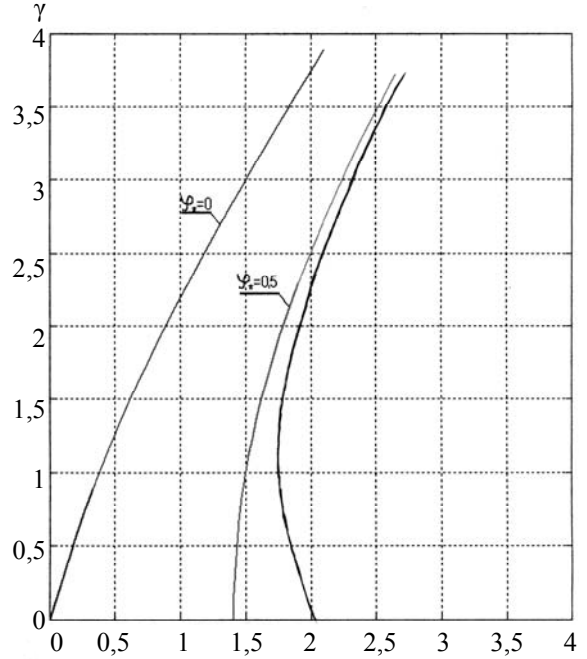


Рис. 3. График эквипотенциалей ($\varphi_a=5$, $\alpha=0,4$)

На границе пучка кривые $\bar{\varphi} = 0$ и $\bar{\varphi} = 1$ имеют наклон в $67,5^\circ$, на бесконечности все эквипотенциали направлены вертикально. Анодная эквипотенциаль, в отличие от нерелятивистского случая, имеет вертикальную касательную при значении параметра ψ_* , определяемом уравнением:

$$\psi_*^2 + \frac{3 + 2\alpha}{2(1 + \alpha)} \psi_* - (1 + \alpha) = 0, \quad \alpha = 2/\varphi_a. \quad (35)$$

В ультрарелятивистском пределе распределение потенциала с учетом формул (5), (10) определяется так:

$$\begin{aligned} z = \sqrt{\frac{2J_e}{\varphi_a}} z = 2\sqrt{\sqrt{1 - \varphi} - (1 - \varphi)} + \\ + \arcsin(1 - 2\sqrt{1 - \varphi}) + \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (36)$$

а электронная плотность тока J_e связана с потенциалом анода φ_a соотношением

$$J_e = \frac{\pi^2}{2} \varphi_a. \quad (37)$$

Чтобы определить углы наклона эквипотенциалей $\varphi = 0$ и $\varphi = 1$ к границе потока, представим зависимость (36) в параметрической форме:

$$\bar{z} = \cos \tau + \tau + \frac{\pi}{2}, \quad 1 - \varphi = \frac{1}{4}(1 - \sin \tau)^2. \quad (38)$$

Вблизи интересующих нас точек на границе пучка $\tau = \mp(\pi/2 - t)$, где двойной знак соответствует значениям $\varphi = 0$ и $\varphi = 1$. В первом случае:

$$\bar{z} \sim t, \quad \varphi \sim t^2 \sim z^2, \quad (39)$$

во втором асимптотика представлена соотношениями:

$$\Delta \bar{z} = \pi - \bar{z} \sim t^3, \quad 1 - \varphi \sim t^4 \sim (\Delta \bar{z})^{4/3}. \quad (40)$$

Аналитическое продолжение $\bar{z} \rightarrow \bar{z} + i\bar{y}$ в формулах (39) приводит к углу наклона в 45° для нулевого формирующего электрода и к классическому значению в $67,5^\circ$ для анодного электрода, поскольку предположение об ультрарелятивистских скоростях электронов, игнорирующее условия их эмиссии, никак не отражается на аналогичных условиях для ионов в окрестности анода. Результат, выражаемый формулой (39), является формальным фактом, не имеющим физического содержания. Асимптотика эквипотенциалей на бесконечности определяется углом в 45° .

Выражения (36), (38) дают возможность получить уравнения формирующих электродов в элементарных функциях в отличие от общего случая (33).

Заключение

Исследование распределения потенциала в биполярном диоде с релятивистскими электронами и конфигурации формирующих электродов для ленточного пучка обнаруживает исключительно медленное стремление параметров потока к ультрарелятивистскому пределу, а во внешней задаче – появление формальных результатов, лишенных физического смысла. Цена вопроса по коэффициенту усиления электронного тока K_e , изменяющегося от 1,865 до $(\pi/2)^2 \approx 2,467$, составляет 24,4 %. Отличие ультрарелятивистской величины при $\varphi_a = 10$ (5 МВ), 100 (50 МВ), 1000 (500 МВ) составляет соответственно 14, 5,3, 1,8 %. Таким образом, в первом случае ($\varphi_a = 5$ МВ) нерелятивистское значение оказывается ближе к истинному, чем ультрареляти-

вистское, а при $\varphi_a = 50$; 500 МВ ошибка составляет 22 и 7,4 % от величины исследуемого эффекта.

Сказанное означает, что при оценке влияния релятивизма в указанном диапазоне энергий необходимо пользоваться не ультрарелятивистскими значениями параметров потока, а их точными величинами при учете ограничений, обусловленных влиянием собственного магнитного поля. При формировании конечных ленточных пучков с прямоугольным сечением $a \times b$ неучет краевых эффектов возмущает поток на площади порядка $2b/a$, что при $a/b = 10$ составляет 20 % площади сечения. Параксиальное приближение для нерелятивистских биполярных пучков исследовано в работе [17]. Вопросы формирования биполярных цилиндрических и конических нерелятивистских пучков с сечением, близким к прямоугольному, при выделении особенностей вблизи электродов рассматривались в работах [18, 19] на основе аппроксимации потенциала отрезками рядов определенной структуры. Решение аналогичной задачи в случае релятивистских электронов зависит от построения аналогичной аппроксимации.

Литература

1. Окс Е. М. Источники электронов с плазменным катодом: физика, техника, применения. Томск: НТЛ, 2005.
2. Гаврилов Н. В., Емлин Д. Р., Буреев О. А., Каменецких А. С., Меньшаков А. И. Источник ленточного пучка ионов газа // Тр. III Междунар. Крейнделевского семинара «Плазменная эмиссионная электроника». Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2009. С. 92.
3. Климов А. С., Бурдовицких В. А., Окс Е. М. Форвакуумный плазменный источник ленточного электронного пучка с повышенной плотностью тока на основе разряда с протяженным полым катодом // Тр. III Междунар. Крейнделевского семинара «Плазменная эмиссионная электроника». Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2009. С. 105.
4. Климов А. С., Бурдовицких В. А., Окс Е. М. О возможности электронно-лучевой обработки диэлектриков плазменным источником электронов в форвакуумной области давлений // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. № 11. С. 61.

5. Langmuir I. The interaction of electrons and positive ion space charges in cathode sheaths // *Phys. Rev.* 1929. Vol. 33. № 6. P. 954.
6. Denega A. J., Kamunin A. A., Timofeeva G. G. Bipolar currents in the system of spherical electrodes // *10th Int. Conf. on Phenomena in Ionized Gases.* Oxford, 1971. P. 132.
7. Завьялов М. А., Камунин А. А., Переводчиков В. И. Электронно-оптические системы на основе сферического диода с плазменным анодом // *РЭ.* 1975. Т. 20. № 7. С. 1466.
8. Белкин В. М., Завьялов М. А., Камунин А. А. К задаче о встречном движении электронов и ионов в сферическом и цилиндрическом диодах // *РЭ.* 1976. Т. 21. № 12. С. 2646.
9. Завьялов М. А., Крейнфельд Ю. Е., Новиков А. А., Шантурин Л. П. Плазменные процессы в технологических электронных пушках. М.: Энергоатомиздат, 1989.
10. Бобров Ю. К., Быстров В. П., Рухадзе А. А. О предельных токах электронного и ионного пучков в плоском биполярном взрывоэмиссионном диоде // *Краткие сообщения ФИАН по физике.* 2005. № 7. С. 23.
11. Meltzer B., Magnetic forces and relativistic speeds in stationary electron beams // *J. Electr. Contr.* 1958. Vol. 4. № 4. P. 350.
12. Абрамян Е. А., Альтеркоп Б. А., Кулешов Г. Д. Интенсивные электронные пучки. М.: Энергоатомиздат, 1984.
13. Четвертков В. И. Релятивистское обобщение закона Чайльда-Ленгмюра. I. Исследование характеристик плоского диода // *ЖТФ.* 1985. Т. 55. № 11. С. 2255.
14. Рудаков Л. И., Бабыкин М. В., Гордеев А. В. и др. Генерация и фокусировка сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Энергоатомиздат, 1990.
15. Брейзман Б. Н., Рютов Д. Д., Ступаков Г. В. Теория сильноточных диодов большого радиуса // *Изв. вузов. Физика.* 1979. № 10. С. 7.
16. Вашковский А. В., Сыровой В. А. Формирующие электроды для биполярных пучков в виде ленты, сплошного и полого цилиндров // *РЭ.* 2006. Т. 51. № 4. С. 483.
17. Вашковский А. В., Завьялов М. А., Сыровой В. А. Формирование широких биполярных пучков с сечением, близким к прямоугольному // *РЭ.* 1999. Т. 44. № 4. С. 485.
18. Сыровой В. А. Формирование биполярных пучков с неизменяющимся сечением // *РЭ.* 2005. Т. 50. № 8. С. 1003.
19. Сыровой В. А. Формирование биполярного конического пучка с произвольным сечением. // *РЭ.* 2007. Т. 52. № 2. С. 231.