

Теория сферического диода как инструмент тестирования программ траекторного анализа

В.М. Белкин, М.А. Завьялов, Т.М. Сапронова, В.А. Сыровой, А.С. Чихачев

ФГУП «Всероссийский электротехнический институт им. В.И.Ленина»
111250 Россия, Москва
e-mail: agilim@vei.ru

Обсуждаются пределы справедливости теории сферического диода при нерелятивистских и релятивистских скоростях в качестве инструмента математического и физического тестирования программ траекторного анализа, предназначенных для расчета существенно разномасштабных потоков. Исследуется влияние собственного магнитного поля и тепловых скоростей, определяющих эти пределы.

В последнее время появляются работы, посвященные расчету интенсивных пучков с высокой компрессией. Так, в [1] обсуждается формирование пучка с компрессией по площади 1000, в [2], где используется пакет траекторного анализа SAM [3-5], называются почти вдвое более высокие цифры.

При описании пучка с линейной компрессией L модель должна уверенно отслеживать величины порядка L^{-1} , что при названных выше компрессиях требует, чтобы уровень ошибки составлял десятые доли процента. Ни одна из существующих программ траекторного анализа открыто не декларирует такой точности, хотя, как было сказано, некоторые из них использованы для решения подобных задач.

В работе [5] проведены тестовые расчеты для сходящегося нерелятивистского конического пучка с углом раствора $\theta_0 = 40^\circ$ и компрессией $L=5$ (r, θ, ψ – сферические координаты). Следует отметить, что эта задача относится к числу простейших, так как имеет дело с одномерным течением по радиальным лучам при однородной плотности тока эмиссии $J=\text{const}$. Многие блоки программы по этой причине работают в щадящем режиме. Указанные обстоятельства и невысокая компрессия не позволяют говорить о надежных расчетах с использованием комплекса SAM [2], когда речь идет о системах с $L \cong 40 \div 60$ при $J \neq \text{const}$.

Подчеркнем, что необходимо различать математическое и физическое тестирование численных моделей. Так, нерелятивистский сферический диод может быть эффективно использован в первом из них при сколь угодно высокой компрессии, когда скорость превышает скорость света, а потенциал ϕ стремится к бесконечности при пренебрежении действием собственного магнитного поля H_ψ , в то время как физическое тестирование должно проходить при учете соответствующих ограничений.

Известно [6], что теория плоского диода внутренне противоречива: бесконечно широкий поток имеет бесконечное собственное магнитное поле при прямолинейных траекториях. Противоречие разрешается введением ограничений на относительные размеры цилиндрической вырезки радиуса R (R, ψ, z – цилиндрические координаты) из плоского диода, для которой справедливо неравенство, означающее малость силы Лоренца по сравнению с силой со стороны электрического поля. В релятивистском случае эти ограничения оказываются более жесткими.

Цель данной работы состоит в оценке влияния собственного магнитного поля H_ψ пучка при высоких компрессиях (а также декомпрессиях) или, другими словами, в установлении предельной компрессии при заданных параметрах потока, когда влиянием H_ψ можно пренебречь. Задача о сферическом диоде представляется более интересной по сравнению с течением между параллельными плоскостями благодаря изменению геометрии потока. Влияние тепловых скоростей на компрессию пучка и распределение потенциала в сферическом диоде можно оценить на основании параксиальной модели с содержащим эмиттанс членом в соответствующем уравнении.

Изучение сферического потока способствует решению проблемы адекватности

приближенных и численных методов исследования [7] и позволяет разрешить следующие вопросы: получение тестового эталона для математического моделирования существенно разномасштабных потоков (сходящихся и расходящихся) при нерелятивистских и релятивистских скоростях; возможность оценки необходимой точности численной модели при фиксированных параметрах пучка и заданном высоком значении L в вариантах "электростатической" компрессии [2]; установление уровня точности в нерелятивистской области для сходящихся и расходящихся потоков при пренебрежении собственным магнитным полем.

Результаты серии расчетов в удобных нормировках, проведенных для катода радиуса 5 см при плотностях тока эмиссии от 0.1 до 10 А/см², представлены на рис.1–4 и в табл.1, 2.

На рис.1 приведены кривые $\varphi(L)$ для сходящегося (кривые 1) и расходящегося потоков (кривые 2) в нерелятивистском случае. Точки, отмеченные крестиками, соответствуют релятивистской модели. Видно, что до 750 кВ максимальное различие δ при $J=10$ А/см² составляет менее 5%, при $J=5$ А/см² имеем $\delta \sim 1\%$. Если принять за границу релятивистской области $\varphi = 100$ кВ, $\gamma = 1 + \varphi \sim 1.2$, $v/c \sim 0.55$, то теория нерелятивистского диода для сходящегося пучка справедлива при относительно невысоких компрессиях: $J=10$ А/см², $L=1.6$; $J=2$ А/см², $L=2.5$; $J=0.5$ А/см², $L=4.4$.

На рис.2, 3 изображена функция D , представляющая собой отношение силы Лоренца к силе со стороны электрического поля для нерелятивистского (кривые 1) и релятивистского (кривые 2) случаев в зависимости от компрессии L и потенциала. Для сходящегося пучка вне зависимости от значения J качественный характер кривых один и тот же: отношение сил D достигает максимума при невысоких значениях $L=1.4 \div 1.8$, причем величина максимума в релятивистском случае меньше, а сам максимум сдвинут в сторону меньших компрессий. Максимум имеет место не только при малой компрессии, но и при относительно невысоких значениях потенциала (рис.3): $\varphi = 100 \div 150$ кВ в нерелятивистском случае, $\varphi = 50 \div 70$ кВ при учете релятивизма. При токе пучка $I \sim 200$ А ($J=5$ А/см², $\theta_0=40^\circ$) значение D не опускается ниже 2%.

Для плоского релятивистского диода максимум D при всех J приходился на 220 кВ [6].

Из рис.1 и характера кривых на рис.3 можно, например, заключить, что при $\varphi=100$ кВ, $J=0.5$ А/см², $I=65$ А, $\theta_0=80^\circ$, $L \sim 4$ неучет собственного магнитного поля может дать ошибку на уровне 2%.

При компрессии $L=6$ релятивистский диод перестает быть инструментом физического тестирования ($D \sim D_{\max}/2$ для $L=6$) при $J=5$ А/см², $\theta_0=40^\circ$, $I=180$ А (ошибка $0.1L^{-1}=1.8\%$), а при прецизионном счете (ошибка $0.01L^{-1}=0.18\%$) необходимо взять пучок с $J=1$ А/см², $\theta_0=10^\circ$, $I \sim 2$ А.

Исследование функции $D(L)$ для расходящегося потока обнаруживает ее неожиданный монотонный рост: электрическое поле уменьшается быстрее, чем член $v_r H_\psi$, в котором v_r растет, а H_ψ убывает. При $J=10$ А/см², $\theta_0=80^\circ$, $L=17.5$ обе силы сравниваются, а в дальнейшем магнитная компонента становится больше.

Анализ поведения $D(L)$ дополнен расчетом возмущенной под действием собственного магнитного поля траектории. На рис.4 построена функция $\delta = \theta/\theta_0$, %, где θ – отклонение от начального угла θ_0 , в зависимости от L для сходящегося пучка (сплошные и прерывистые линии – нерелятивистские и релятивистские скорости соответственно).

Для сходящегося потока значения δ по релятивистской и нерелятивистской моделям различаются почти в полтора раза при $L \sim 15$, в то время как для расходящихся пучков максимальное различие составляет $\sim 15\%$.

Отметим, что как при компрессии, так и при декомпрессии при $\varphi \sim 100$ кВ и $L \sim 2.5$ величина δ имеет порядок 5%.

Из сказанного выше следует, что для прецизионного счета при $\varphi \sim 50$ кВ необходимо не только пользоваться релятивистской моделью, но и учитывать собственное магнитное поле.

Проведенное исследование позволяет строить суждения относительно адекватности результатов траекторного анализа. Так, если реальная ЭОС [2] при заданном анодном напряжении обеспечивает тот же ток, что и сферический диод с теми же параметрами, но при этом минимальное расстояние между катодом и анодом на 10% больше, чем в сферическом диоде, то это может явиться основанием для озабоченности и проверки алгоритмов, составляющих программу.

Для изучения влияния собственного магнитного поля и начальных тепловых скоростей при ускорении потока электронов в сферическом диоде удобно использовать модельное кинетическое описание ансамбля частиц. Стационарный пучок с переменным радиусом в модели Капчинского-Владимирского описывается уравнением [8]:

$$p(z) \frac{d}{dz} \left[p(z) \frac{dR}{dz} \right] + \Omega^2(z) R = \frac{\varepsilon_0^2}{R^3}; \quad p = \sqrt{\gamma^2 - 1},$$

$$\gamma = 1 + \varphi, \quad v(z) = \sqrt{1 - 1/\gamma^2}, \quad \Omega^2(z) = \frac{\gamma \gamma''}{2} - \frac{I}{\gamma(z) R}. \quad (1)$$

Здесь I – ток, $R(z)$ – радиус пучка, p – продольный импульс, $\varphi(z)$ – потенциал, ε_0 – эмиттанс (величина, характеризующая разброс поперечных скоростей).

Если перейти от цилиндрических координат R, z к сферическим r, θ , то для конического пучка $\theta_0 = \text{const}$, $R = r \sin \theta_0$ из (1) следует уравнение для потенциала:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\gamma}{dr} \right) = \frac{I}{\gamma \sqrt{\gamma^2 - 1}} + \frac{\varepsilon_*}{r^2 \gamma}, \quad \varepsilon_* = \frac{8W_T}{\pi \theta_0^2}, \quad (2)$$

где W_T – тепловая энергия, а последний член соответствует слагаемому с ε_0^2 в (1) и создает добавочное ограничение для тока. В случае плоской геометрии аналогичное уравнение решалось в работе [9], где показано, что при ненулевом эмиттансе величина тока уменьшается в сравнении с величиной, получаемой по закону 3/2. При

$$\varphi_a < \frac{r_c}{r_a} W_T, \quad (3)$$

ток равен нулю. Здесь φ_a – потенциал анода. Отметим, что в (3) вошло отношение радиусов катода и анода.

На рис.5–10 приведены результаты расчетов по модели (2) относительного различия распределения функции $\gamma = 1 + \varphi$ в "холодном" пучке при учете собственного магнитного γ_{0H} и пучке с учетом тепловых эффектов, но без учета магнитного поля γ_{T0} , а также при учете обоих эффектов γ_{TH} :

$$\delta_{T0} = \frac{\gamma_{T0} - \gamma_{0H}}{\gamma_{0H}}, \quad \delta_{TH} = \frac{\gamma_{TH} - \gamma_{0H}}{\gamma_{0H}}.$$

Температура катода в эВ изменялась в диапазоне от классического для термокатодов значения 0.1 через дававшее лучшее совпадение с экспериментом значение 0.7 до величины в 10 эВ, свойственной плазменному катоду. Диапазон предельной компрессии сводился к трем значениям: 100, 20, 3.

Во всех случаях, кроме рис.10, относительная ошибка снижалась с ростом плотности тока эмиссии и росла с увеличением температуры.

При $J \leq 1$ А/см² и $L \sim 3$ в нерелятивистской области $\varphi < 100$ кВ ошибка при неучете магнитного поля возрастает с 0.1% до 3.5%. По-видимому, это связано с немонотонным изменением функции D , изображенной на рис.2, 3.

Список литературы

1. Абдильманов В.Г., Короткова В.А., Невский П.В. и др. Электронно-оптическая система со сходимостью 1000, формирующая мощный протяженный электронный поток малого диаметра. // Прикл. физика. 1999. №3-4. С.111.
2. Запрягаев И.А. Исследование 100 МВт источника электронов с высокой компрессией пучка. Канд. диссертация. ИЯФ им. Г.И. Будкера, Новосибирск, 2004.
3. Тиунов М.А., Фомель Б.М., Яковлев В.П. SAM – интерактивная программа для расчета электронных пушек на мини-ЭВМ. Препринт 87-35, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1987.
4. Кузнецов Г.И., Тиунов М.А., Яковлев В.П. Диодная пушка с высокой компрессией пучка и повышенной электрической прочностью. Препринт 89-161, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1989.
5. Fomel B.M., Tiunov M.A., Yakovlev V.P., SAM – an Interactive Code for Evaluation of Electron Guns. Preprint 89-159, INP, Novosibirsk, 1989.
6. Meltzer B. Magnetic forces and relativistic speeds in stationary electron beams. // J. Electr. Contr. 1958. V.4. №4. P.350.
7. Сыровой В.А. Проблема адекватности математических моделей в оптике плотных релятивистских электронных пучков. // РЭ. 2003. Т.48. №4. С.467.
8. Чихачев А.С. Кинетическая теория квазистационарных состояний пучков заряженных частиц. М.: Физматиз, 2001.
9. Азарова О.Н., Чихачев А.С. Параксиальный цилиндрический пучок заряженных частиц с конечным поперечным эмитансом в ускоряющем промежутке. // РЭ. 1990. Т.35. №2. С.410.

Таблица 1

Релятивистский сходящийся пучок $J = 0,0368$			
r_c/r	φ	E_r	D
1,1	0,006825	-0,108138	-1,182424
1,2	0,016808	-0,156032	-1,392592
1,3	0,028256	-0,202477	-1,494797
1,4	0,040656	-0,250418	-1,547393
1,5	0,053742	-0,300810	-1,572149
1,6	0,067351	-0,354075	-1,579778
1,7	0,081374	-0,410436	-1,576323
1,8	0,095733	-0,470021	-1,565487
1,9	0,110371	-0,532911	-1,549664
2,0	0,125244	-0,599160	-1,530466
2,5	0,202157	-0,981789	-1,413283
3,0	0,281825	-1,451254	-1,293242
3,5	0,363165	-2,008243	-1,184411
4,0	0,445629	-2,653031	-1,088787
4,5	0,528898	-3,385750	-1,005381
5,0	0,612774	-4,206477	-0,932565
5,5	0,697121	-5,115259	-0,868734
6,0	0,781847	-6,112127	-0,812486
6,5	0,966883	-7,197104	-0,762647
7,0	0,952177	-8,370205	-0,718246
8,0	1,123394	-10,980829	-0,642693
9,0	1,295268	-13,944071	-0,580958
10	1,467651	-17,259977	-0,529670
15	2,334396	-39,130351	-0,365689
20	3,205710	-69,819899	-0,278236
30	4,954769	-157,658810	-0,187582
40	6,708235	-280,778746	-0,141257
50	8,464098	-439,180302	-0,113211

Таблица 2

Релятивистский сходящийся пучок $J = 0,184$			
r_c/r	φ	E_r	D
1,1	0,019975	-0,316755	-0,683903
1,2	0,049252	-0,458113	-0,793122
1,3	0,082903	-0,595910	-0,837131
1,4	0,119441	-0,738752	-0,851758
1,5	0,158091	-0,889427	-0,850602
1,6	0,198374	-1,049180	-0,840371
1,7	0,239969	-1,218663	-0,824808
1,8	0,282645	-1,398262	-0,806153
1,9	0,326232	-1,588217	-0,785804
2,0	0,370597	-1,788692	-0,764653
2,5	0,601071	-2,951908	-0,661402
3,0	0,841283	-4,386973	-0,574201
3,5	1,087703	-6,096125	-0,503986
4,0	1,338460	-8,080290	-0,447485
4,5	1,592427	-10,339932	-0,401525
5,0	1,848875	-12,875317	-0,363630
5,5	2,107300	-15,686607	-0,331965
6,0	2,367338	-18,773907	-0,305175
6,5	2,628719	-22,137290	-0,282253
7,0	2,891237	-25,776808	-0,262441
8,0	3,419065	-33,884391	-0,229972
9,0	3,949869	-43,096859	-0,204526
10	4,483008	-53,414336	-0,184076
15	7,171352	-121,578858	-0,122449
20	9,881558	-217,374081	-0,091618
30	15,333364	-491,860233	-0,060879
40	20,806892	-876,875627	-0,045569
50	26,292313	-1372,420998	-0,036408

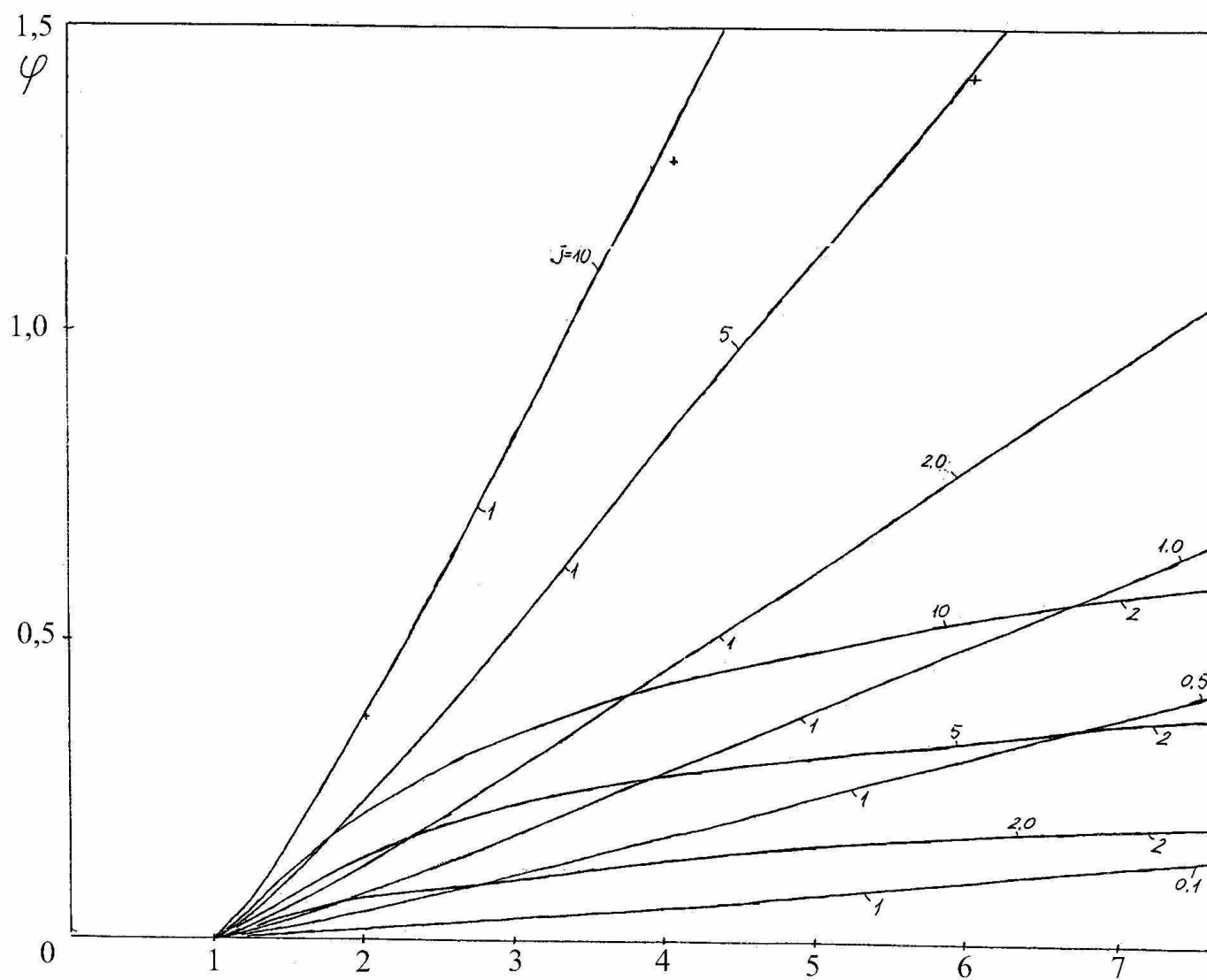


Рис.1. Зависимость потенциала φ от компрессии L при разных значениях J ; кривые 1 – сходящийся поток, кривые 2 – расходящийся поток; кресты – нерелятивистские значения потенциала.

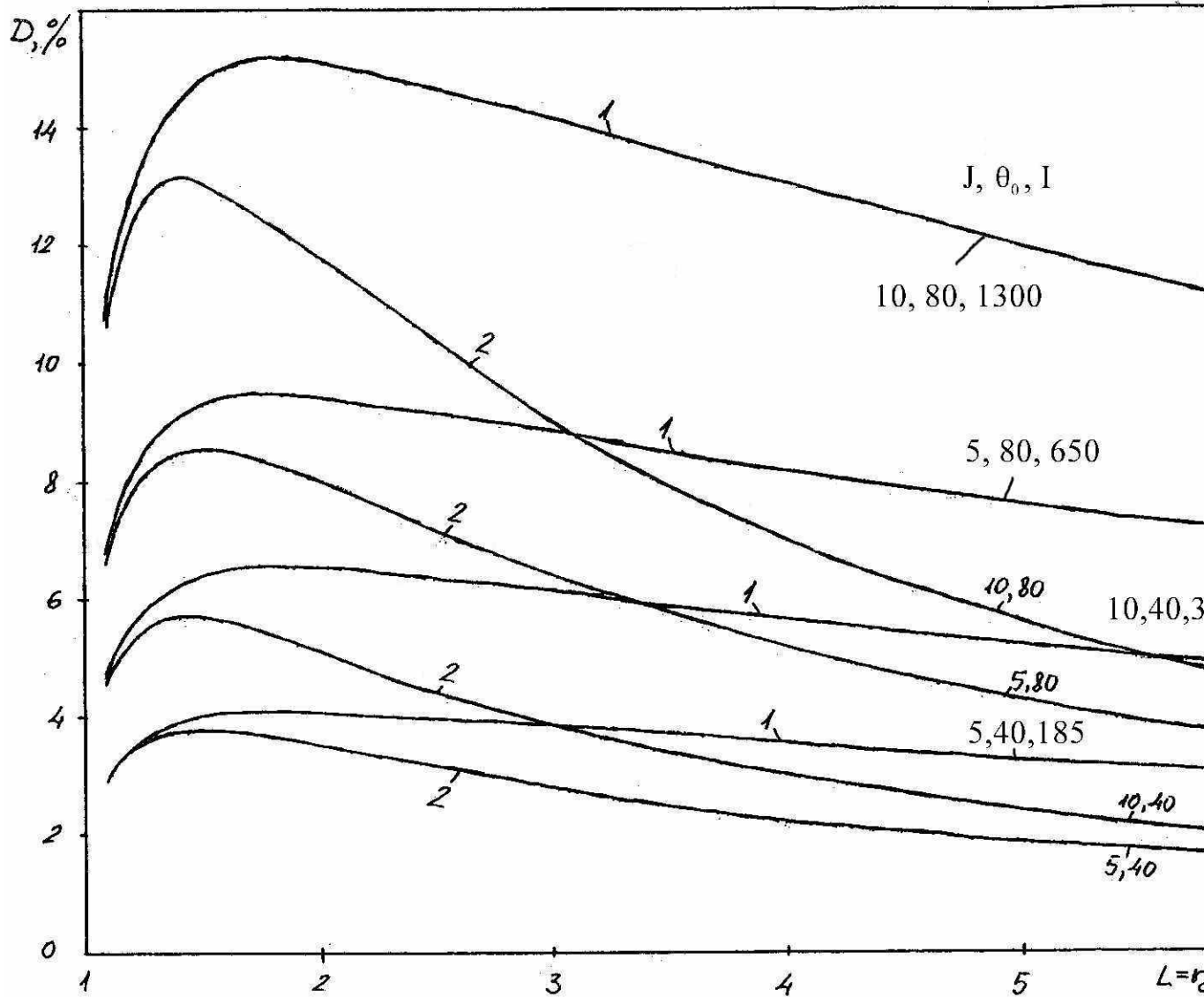


Рис.2. Отношение D магнитных и электрических сил для сходящегося пучка в зависимости от компрессии L для нескольких наборов J, θ_0, I ; 1 – нерелятивистские, 2 – релятивистские кривые.

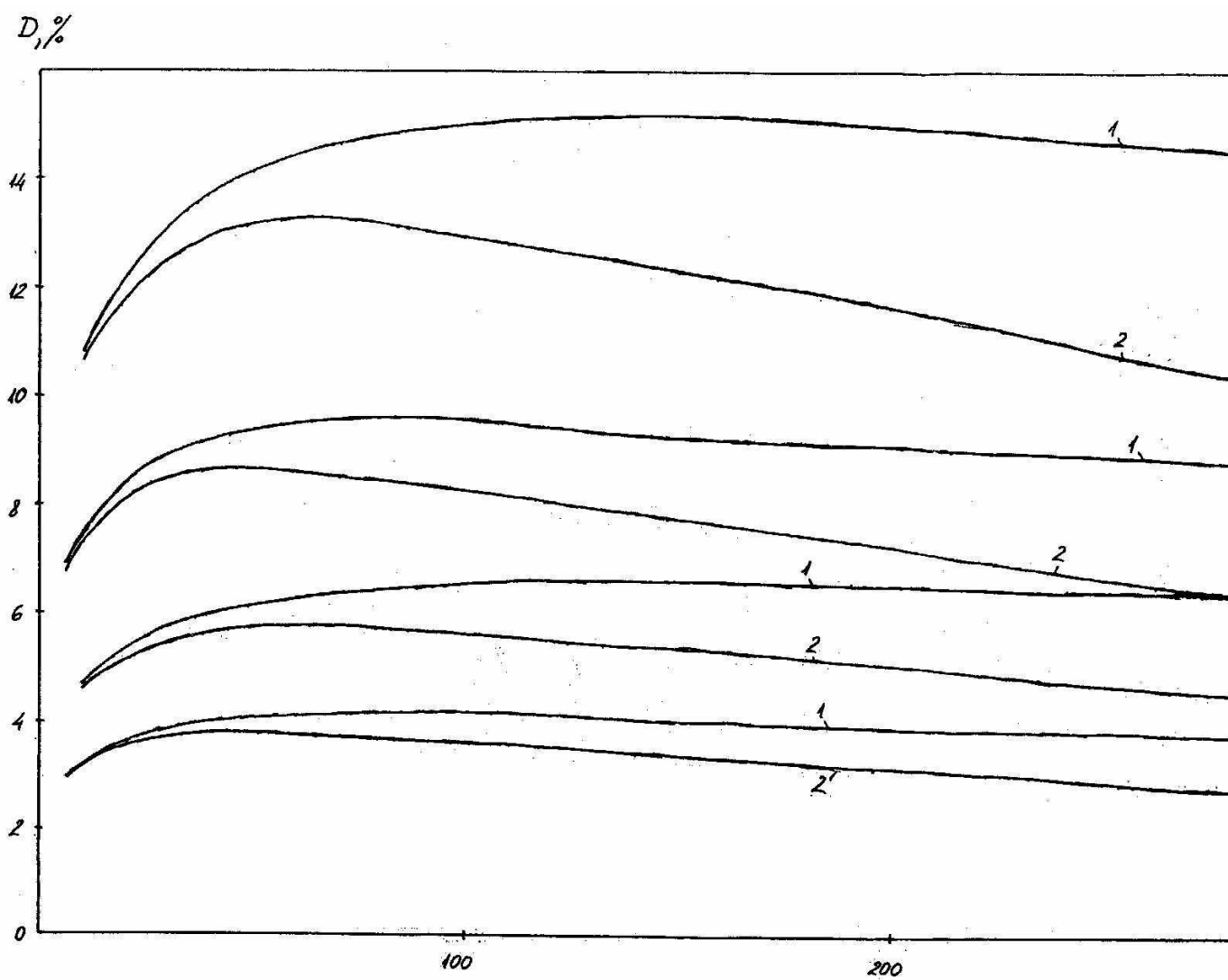


Рис.3. Отношение D магнитных и электрических сил для сходящегося пучка в зависимости от потенциала ϕ .

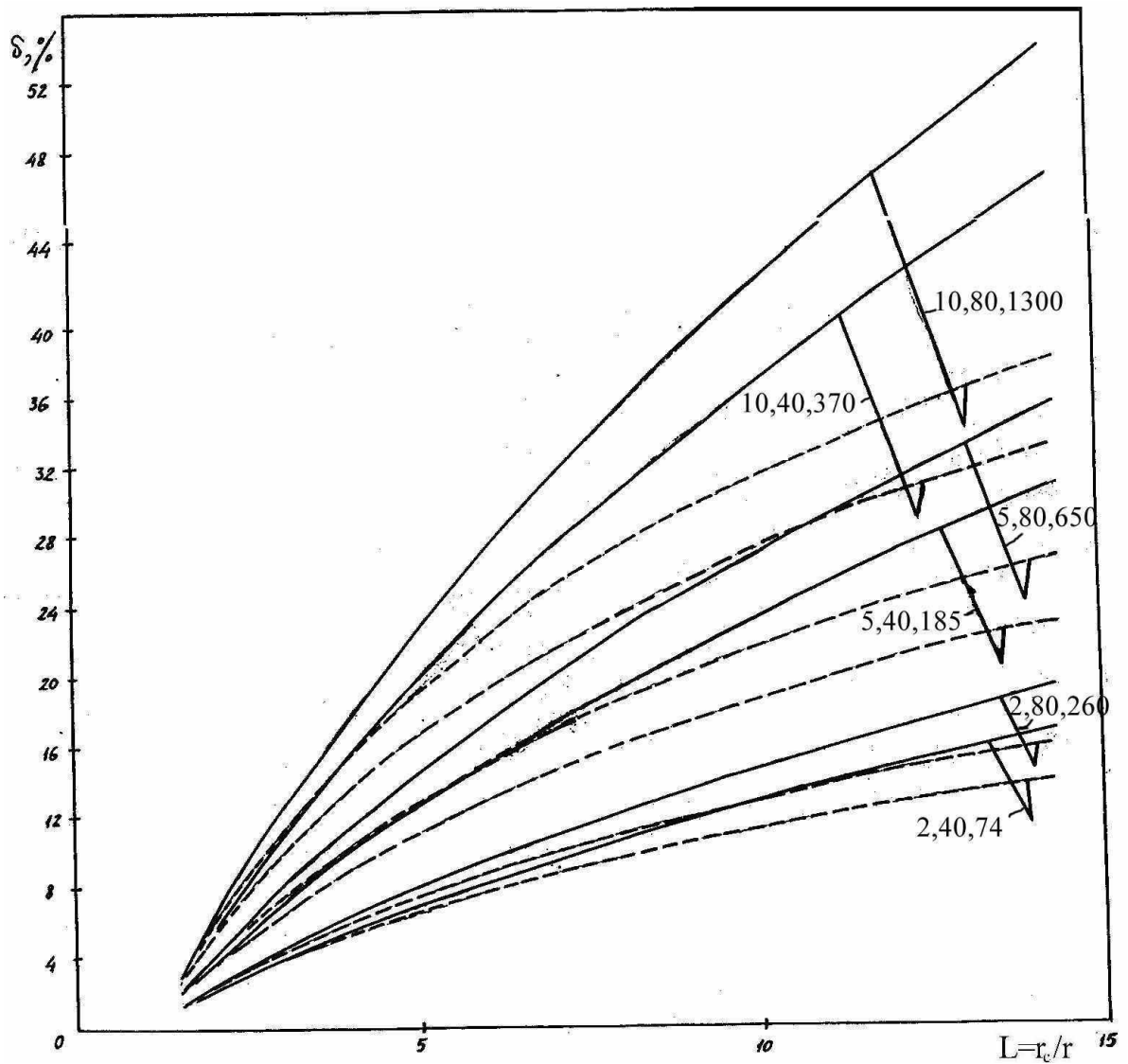


Рис.4. Отношение δ отклонения θ траектории от начального угла θ_0 для сходящегося пучка в зависимости от компрессии L ;
сплошные и прерывистые линии – нерелятивистский и релятивистский поток соответственно.

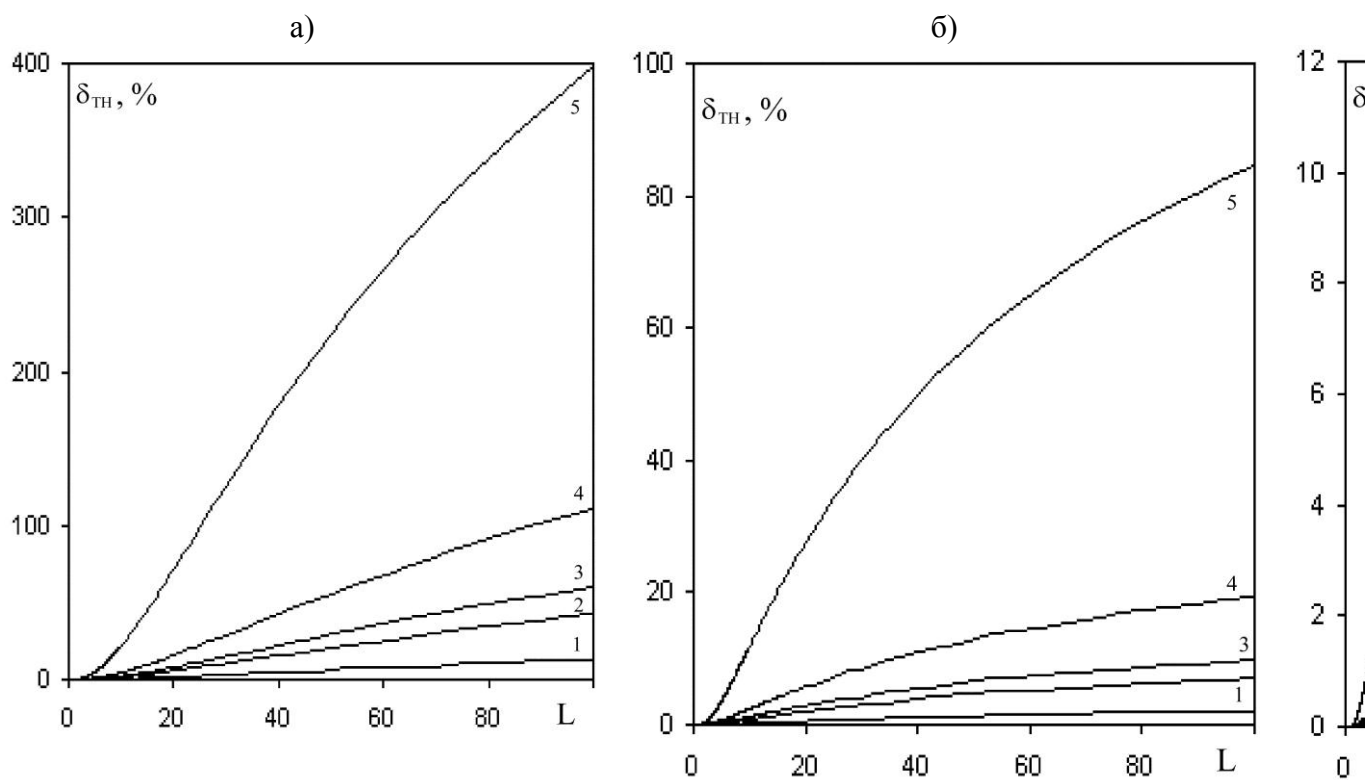


Рис.5. Зависимости относительной ошибки $\delta_{\text{тн}}$ от компрессии L при $\theta_0=30^\circ$, а) $J=0.1$ А/см², б) $J=1$ А/см², в) $J=10$ А/см² для температуры катода: 1 – $T=0.2$ эВ, 2 – $T=0.7$ эВ, 3 – $T=1$ эВ, 4 – $T=2$ эВ, 5 – $T=10$ эВ с учетом магнитного поля.

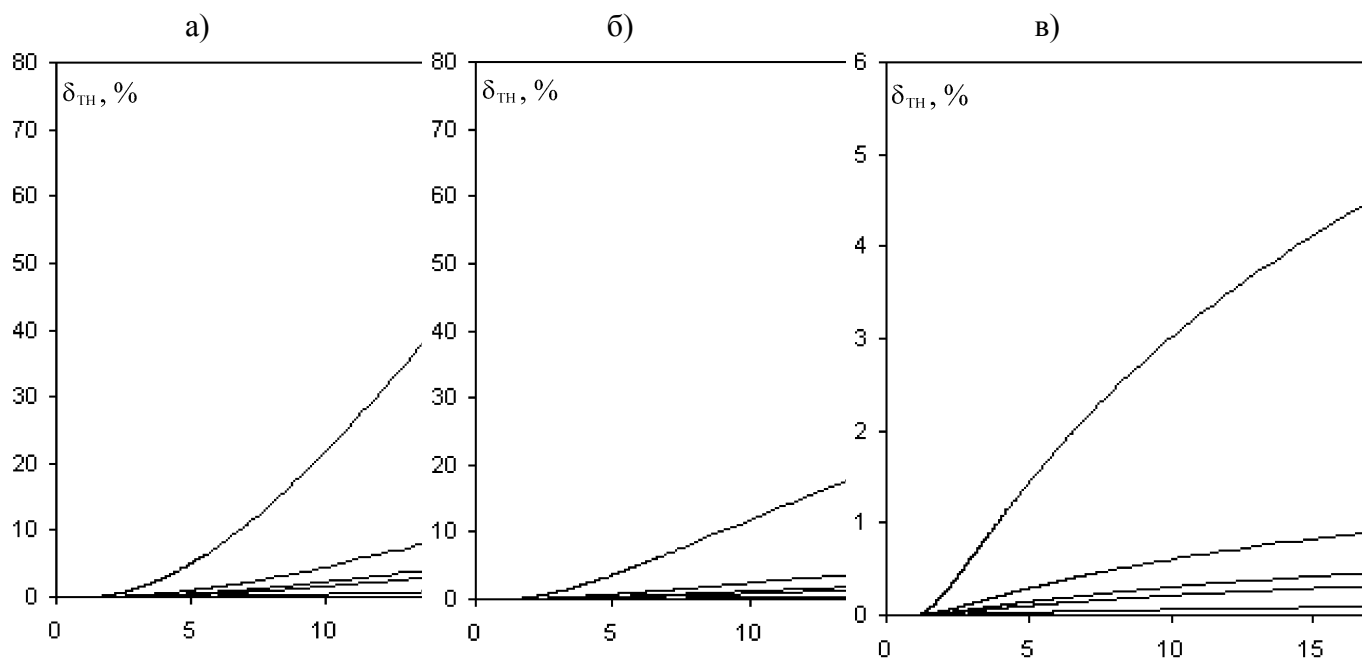


Рис.6. Зависимости относительной ошибки функции $\delta_{тн}$ от компрессии L при $\theta_0=30^\circ$, а) $J=0.1$ A/cm², б) $J=1$ A/cm², в) $J=10$ A/cm² для температуры катода: 1 – $T=0.2$ эВ, 2 – $T=0.7$ эВ, 3 – $T=1$ эВ, 4 – $T=2$ эВ, 5 – $T=10$ эВ с учетом магнитного поля.

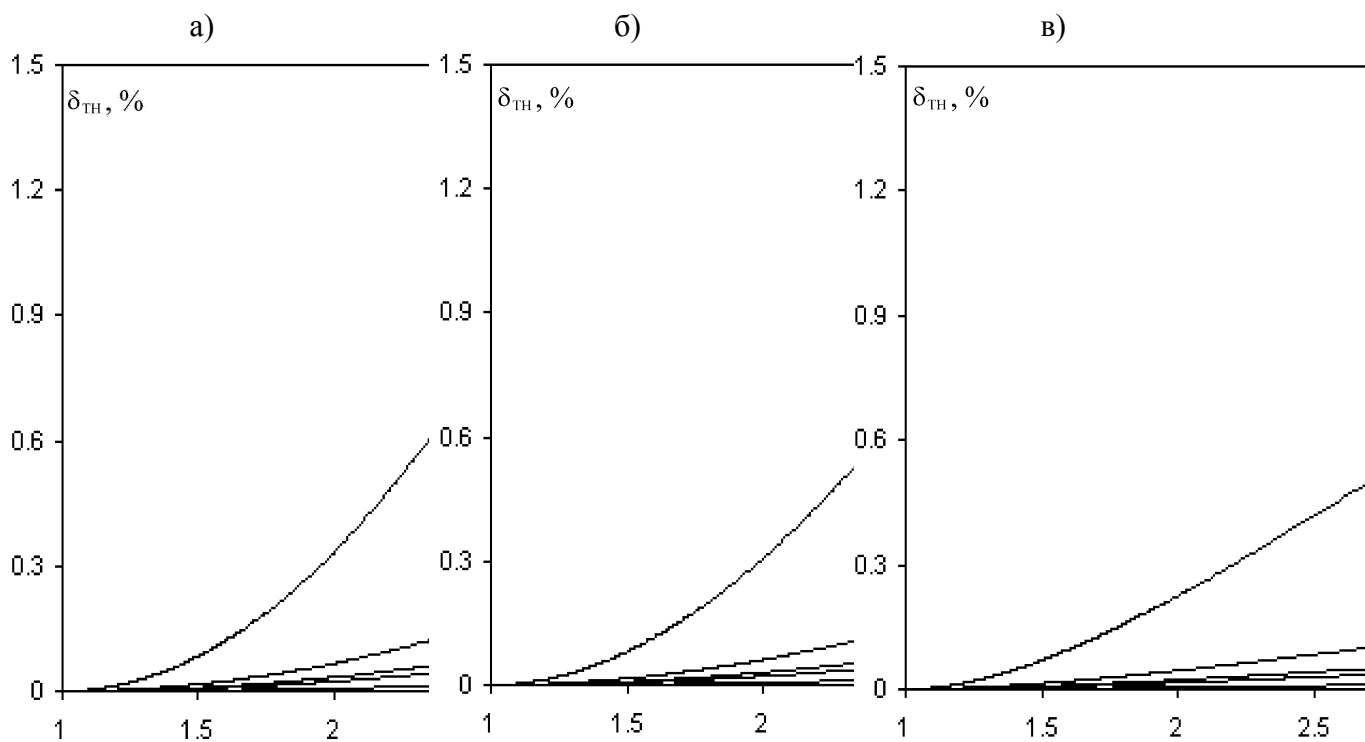


Рис.7. Зависимости относительной ошибки функции $\delta_{тн}$ от компрессии L при $\theta_0=30^\circ$, а) $J=0.1 \text{ A/cm}^2$, б) $J=1 \text{ A/cm}^2$, в) $J=10 \text{ A/cm}^2$ для температуры катода: 1 – $T=0.2 \text{ эВ}$, 2 – $T=0.7 \text{ эВ}$, 3 – $T=1 \text{ эВ}$, 4 – $T=2 \text{ эВ}$, 5 – $T=10 \text{ эВ}$ с учетом магнитного поля.

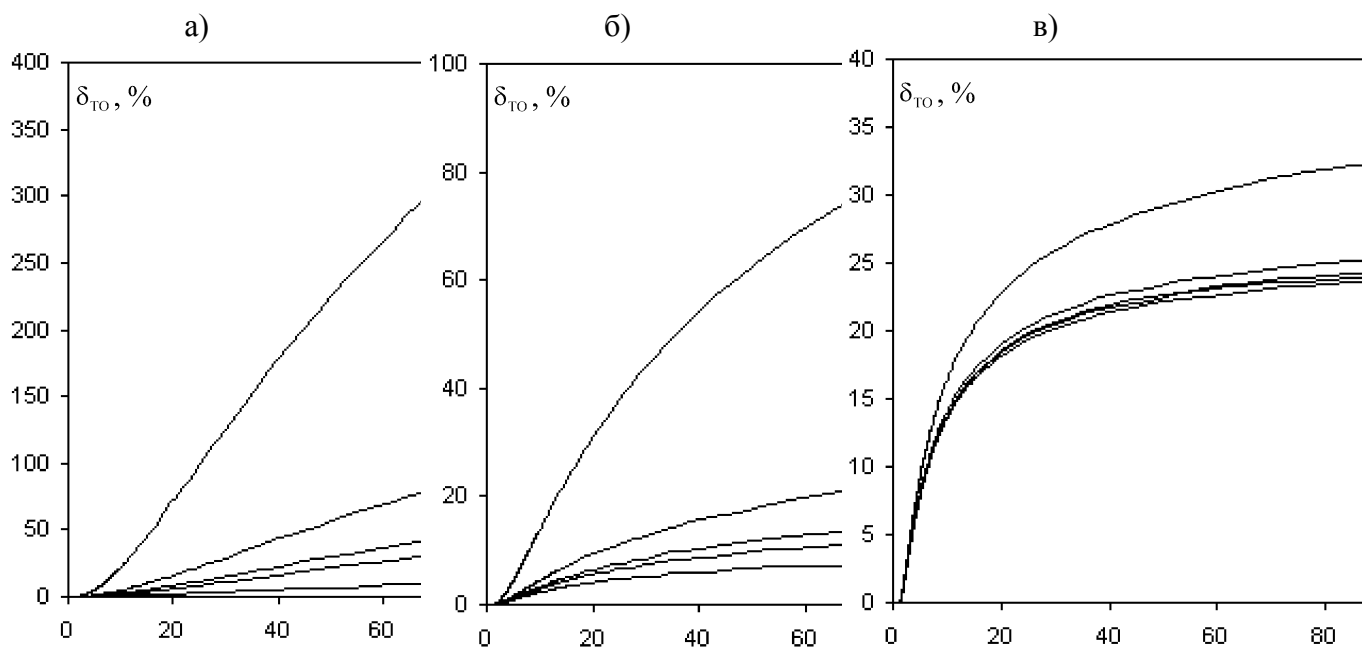


Рис.8. Зависимости относительной ошибки функции δ_{TO} от компрессии L при $\theta_0=30^\circ$, а) $J=0.1 \text{ A/cm}^2$, б) $J=1 \text{ A/cm}^2$, в) $J=10 \text{ A/cm}^2$ для температуры катода: 1 – $T=0.2 \text{ эВ}$, 2 – $T=0.7 \text{ эВ}$, 3 – $T=1 \text{ эВ}$, 4 – $T=2 \text{ эВ}$, 5 – $T=10 \text{ эВ}$ без учета магнитного поля.

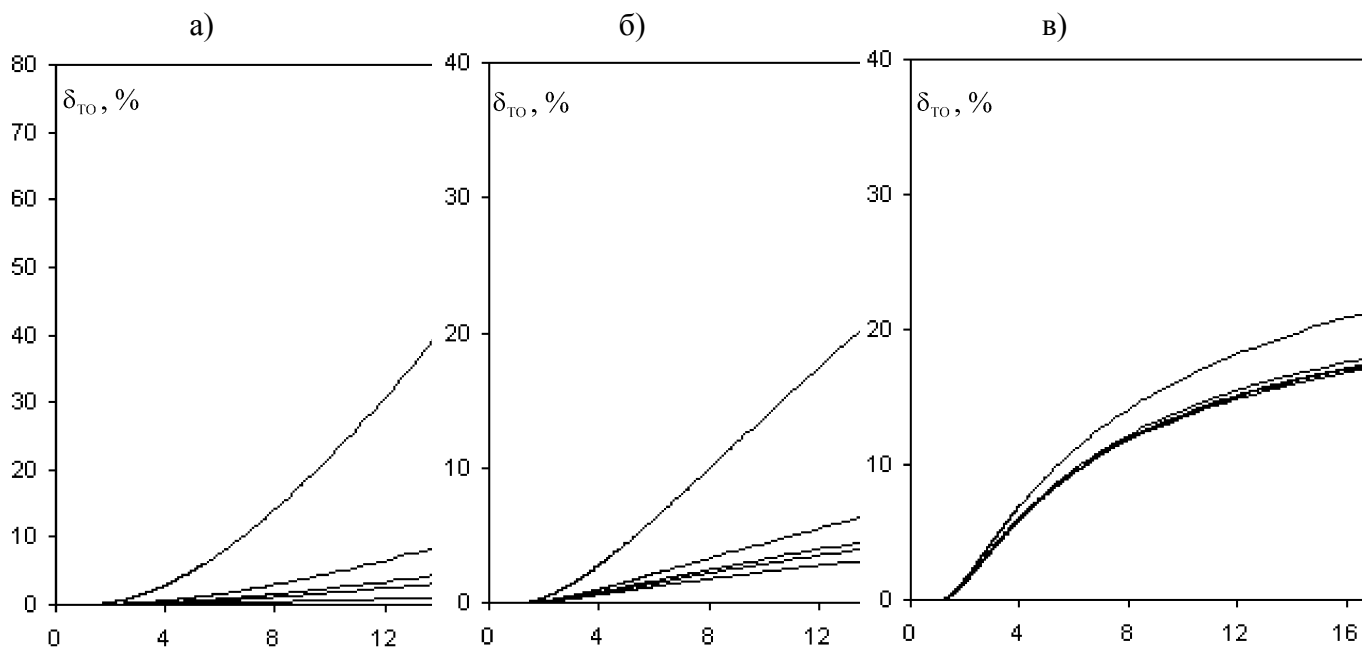


Рис.9. Зависимости относительной ошибки функции δ_{T0} от компрессии L при $\theta_0=30^\circ$, а) $J=0.1$ А/см², б) $J=1$ А/см², в) $J=10$ А/см²

для температуры катода: 1 – $T=0.2$ В, 2 – $T=0.7$ В, 3 – $T=1$ В, 4 – $T=2$ В, 5 – $T=10$ В без учета магнитного поля.

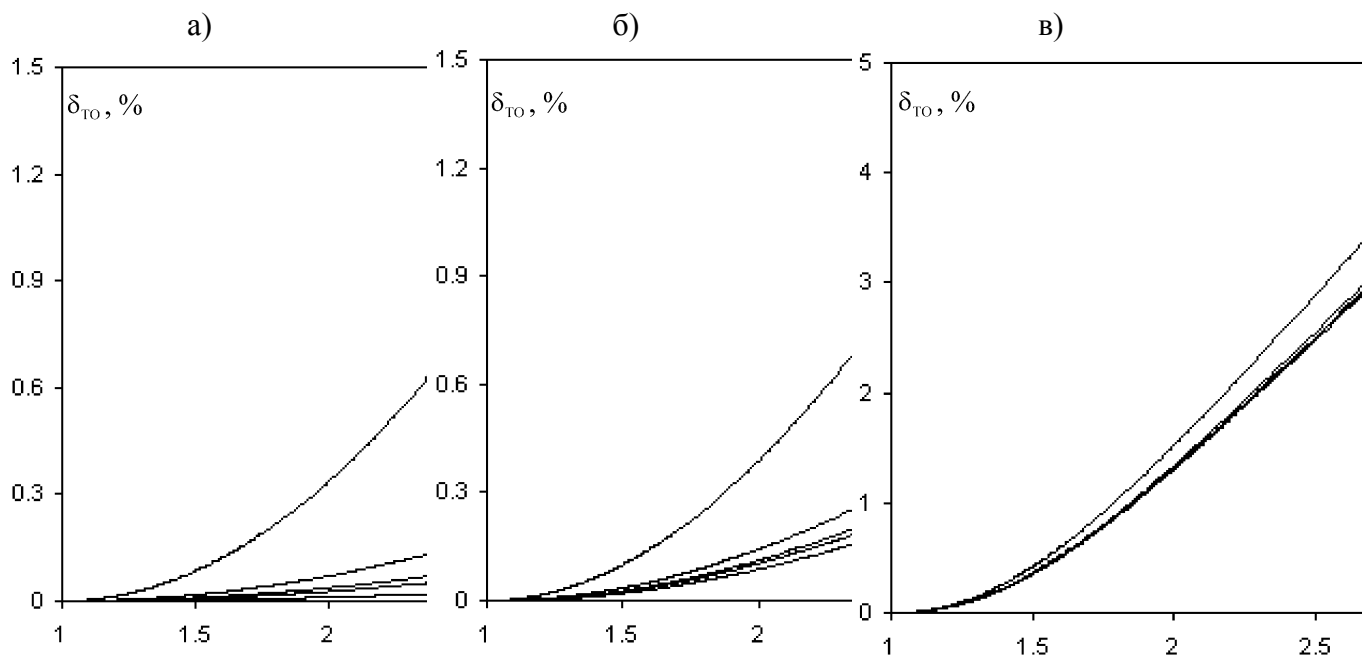


Рис.10. Зависимости относительной ошибки функции δ_{T0} от компрессии L при $\theta_0=30^\circ$, а) $J=0.1 \text{ A/cm}^2$, б) $J=1 \text{ A/cm}^2$, в) $J=10 \text{ A/cm}^2$ для температуры катода: 1 – $T=0.2 \text{ эВ}$, 2 – $T=0.7 \text{ эВ}$, 3 – $T=1 \text{ эВ}$, 4 – $T=2 \text{ эВ}$, 5 – $T=10 \text{ эВ}$ без учета магнитного поля.