

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.8

### КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРОХОЖДЕНИЯ И ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ ГРАДИЕНТНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ

© 2012 г. В. К. Балханов, Л. Х. Ангархаева, Ю. Б. Башкуев, А. Г. Гантимуров

Институт физического материаловедения СО РАН

Российская Федерация, 670047 Улан-Удэ, ул. Сахьяновой, 6

E-mail: ballar@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.03.2010 г.

Рассмотрен градиентный диэлектрический слой, в котором диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(z)$  зависит от координаты  $z$  в слое следующим образом:  $\varepsilon(z) = \varepsilon_c a^4 / (z - a)^4$  ( $a$  – параметр градиентности). Для этого слоя определены коэффициенты отражения  $r_o$  и прохождения  $r_p$ . Установлено, что рассматриваемый градиентный слой в широком частотном диапазоне имеет постоянные по амплитуде и фазе коэффициенты отражения и прохождения и может служить фильтром низких частот в радиотехнических устройствах при передаче широкополосных сигналов.

#### ВВЕДЕНИЕ

Для радиотехнических устройств, используемых для излучения, передачи и приема электромагнитных сигналов в широком диапазоне частот, могут быть полезными среды с градиентными электрическими параметрами проводимости  $\sigma$  и диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  [1, 2]. Такие среды можно создать напылением молекулярных пучков на подложку, выращиванием химическими методами, а также сборкой тонких пластин в стопку, где каждая пластина имеет свои, отличные от других, значения проводимости и диэлектрической проницаемости [3]. Для моделирования и анализа работы таких радиотехнических устройств, содержащих в качестве элемента градиентный слой, важно иметь в качестве модели точно решаемую задачу. Мы в качестве модели рассмотрим слой с такой градиентной диэлектрической проницаемостью, которая допускает точное решение задачи вычисления компонент электромагнитного поля в слое и коэффициентов отражения и прохождения этого слоя. Обычно общим приемом, позволяющим отыскивать точные решения, является метод редукции [4] уравнения Гельмгольца при помощи замены переменных и функций к какому-либо опорному дифференциальному уравнению, решения которого известны [2]. Недавно появились другие методы редукции, существенно отличающиеся от [4], это [5, 6]. Они позволяют получить решения уравнений Максвелла, отличные от приведенных в [2].

В статье рассмотрено общее решение задачи для градиентной среды. Полученные результаты проверены предельным переходом от градиентной к однородной среде. Также рассмотрена полу-

бесконечная градиентная диэлектрическая среда, на которую в однородном диэлектрике нормально падает плоская электромагнитная волна. Для этого случая найдены коэффициенты отражения и прохождения. Получено решение задачи для градиентного диэлектрического слоя конечной толщины.

Рассматриваемая задача приобрела актуальность в последнее время. Так, в работе [7] использована идея восстановления электрических параметров отражающего слоя по огибающей частотной характеристике коэффициента отражения. В работе [8], как и в данной работе, рассматривался неоднородный слой. Однако в [8] авторы пытались найти решение в виде ряда по пространственной координате, у нас же задача рассматривается в таком виде, которое допускает точное аналитическое решение как для компонент электромагнитного поля, так и для коэффициентов прохождения и отражения.

#### 1. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

Примем, что электромагнитная волна зависит от времени как  $\exp(-i\omega t)$ , где  $\omega$  – круговая частота. Ниже производные по времени не присутствуют, поэтому экспоненциальный множитель  $\exp(-i\omega t)$  у компонент электромагнитного поля не выписывается. В неоднородной диэлектрической среде волновое уравнение для тангенциальной компоненты электрического поля  $E$  имеет следующий вид:

$$E'' + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(z) E = 0, \quad (1)$$

где  $c$  – скорость света, два штриха означают дважды дифференцирование по  $z$ , координата  $z$  отсчитывается от границы раздела в глубь градиентной среды. Согласно работам [5, 6], решение волнового уравнения (1) будем искать в следующем виде:

$$E = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(z)}} \exp\left(i \frac{\omega}{c} \varphi(z)\right). \quad (2)$$

Такой метод решения существенно отличается от метода редукции, рассматриваемого в [2]. Подставляя (2) в (1), получаем

$$\varepsilon(z) = \varphi'^2 - \frac{c^2}{\omega^2} \left( \frac{3\varphi''^2}{4\varphi'^2} - \frac{\varphi'''}{2\varphi'} \right). \quad (3)$$

Здесь мы имеем одно уравнение для двух функций  $\varepsilon(z)$  и  $\varphi(z)$ . Однако, если выражение в скобках положить равным нулю, то из (3) получим необходимые нам два уравнения. Одно из них –

$$\frac{3\varphi''^2}{4\varphi'^2} - \frac{\varphi'''}{2\varphi'} = 0$$

интегрируется элементарно

$$\varphi = \frac{C_1}{C_2 + z} + C_3 \quad (4)$$

( $C_{1,2,3}$  – постоянные интегрирования), из другого уравнения  $\varepsilon(z) = \varphi'^2$  находим

$$\varepsilon(z) = \frac{C_1^2}{(C_2 + z)^4}.$$

Полученное решение для диэлектрической проницаемости удобно записать в следующем виде:

$$\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon_c a^4}{(z - a)^4}. \quad (5)$$

На верхней границе при  $z = 0$  граничное значение диэлектрической проницаемости  $\varepsilon = \varepsilon_c$ , на нижней границе при  $z = h$  значение  $\varepsilon(h) = \varepsilon_c a^4 / (a - h)^4$ . Величину  $a$  с размерностью длины можно назвать параметром градиентности. В зависимости от требуемых условий к градиентному слою параметр градиентности  $a$  может иметь и отрицательное значение. Для исключения случая расходимости выражения (5) необходимо, чтобы величина  $a$  не была равна толщине  $h$  градиентного слоя. Чтобы переходный слой стал однородным с постоянным значением диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_c$ , надо перейти к пределу  $a \rightarrow \infty$ .

Подставляя (4) в выражение (2), получаем решение для электрического поля

$$E = \frac{a - z}{a} \text{const} \exp\left(\pm ik_c \frac{a^2}{a - z} \mp ik_c a\right). \quad (6)$$

Здесь введен параметр

$$k_c = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_c}, \quad (7)$$

а знаки “ $\pm$ ” отвечают падающей и отраженной волнам соответственно. Дополнительная фаза в экспоненте, не зависящая от  $z$ , появляется из условия, что при переходе к однородной среде электрическое поле должно определяться соотношением

$$E = \text{const} \exp(\pm ik_c z). \quad (8)$$

Данное соотношение является решением волнового уравнения с постоянными коэффициентами. Действительно, в пределе  $a \rightarrow \infty$  экспонента в решении (6) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \pm ik_c \frac{a^2}{a - z} \mp ik_c a &\approx \\ \approx \pm ik_c \left( a + z + \frac{z^2}{a} + \dots \right) \mp ik_c a &= \pm ik_c z, \end{aligned}$$

и тогда выражение (6) переходит в (8).

Также приведем выражение для электрического поля, когда имеем падающую волну с единичной амплитудой:

$$E_1 = \exp(ik_1 z) + A \exp(-ik_1 z). \quad (9)$$

Здесь множитель  $A$  является амплитудой отражения, волновое число в однородной диэлектрической среде вычисляется по уравнению

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}, \quad (10)$$

где  $\varepsilon_1$  – диэлектрическая проницаемость однородной среды. Отраженная волна (слагаемое с амплитудой  $A$  в формуле (9)) возникает из-за наличия границы раздела между однородной и градиентной средами. Поясним сказанное более подробно.

Для неоднородной среды диэлектрическая проницаемость имеет градиент. Один из способов аппроксимации такой среды состоит в моделировании ее тонкими слоисто-однородными слоями, когда каждый слой обладает однородными значениями диэлектрической проницаемости. Для подобной модели сохраняется линейная связь между компонентами электромагнитного поля. При моделировании неоднородного строения среды тонкими однородными слоями сохраняется линейность уравнений Максвелла. В каждом слое уравнения Максвелла имеют решения в виде проходящих и отраженных волн, поэтому можно ввести понятие отраженной волны и для градиентной или неоднородной среды. При этом модель градиентной среды является более общей по сравнению со слоисто-однородной моделью. Градиентная зависимость диэлектрической проницаемости позволяет рассматривать среды с широкополосными частотными свойствами.

Тангенциальная компонента магнитной индукции, ортогональная к электрическому полю находится из следующего выражения:

$$B = -\frac{i}{\omega} E'. \quad (11)$$

Оно следует из уравнений Максвелла и одинаково во всех средах с различной пространственной зависимостью диэлектрической проницаемости. Подставляя (9) в (11), находим магнитную индукцию падающей волны

$$B_1 = \frac{k_1}{\omega} \exp(ik_1 z) - \frac{k_1}{\omega} A \exp(-ik_1 z). \quad (12)$$

## 2. ПОЛУБЕСКОНЕЧНАЯ ГРАДИЕНТНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ СРЕДА

Прошедшая в градиентную среду волна  $E$ , согласно решению (6), имеет следующий вид:

$$E = \frac{a-z}{a} R \exp\left(ik_c \frac{a^2}{a-z} - ik_c a\right). \quad (13)$$

Выбор знаков в экспоненте определяется условием, что в пределе  $a \rightarrow \infty$  получаем прошедшую плоскую волну  $E = R \exp(ik_c z)$ , где  $R$  – амплитуда прохождения.

Подставляя в (11) функцию (13), получаем выражение для магнитной индукции:

$$B = \frac{R}{a\omega} \left(i + \frac{k_c a^2}{a-z}\right) \exp\left(ik_c \frac{a^2}{a-z} - ik_c a\right). \quad (14)$$

Для электрического поля и магнитной индукции выписаны только ненулевые компоненты.

Граничные условия означают, что при  $z = 0$  компоненты  $E_1$  и  $E$ , а также  $B_1$  и  $B$  равны соответственно друг другу. Отсюда получаем два уравнения для  $A$  и  $R$ . Решая эти уравнения, находим

$$A = \frac{k_1 - k_c - i/a}{k_1 + k_c + i/a}, \quad (15)$$

$$R = \frac{2k_1}{k_1 + k_c + i/a}. \quad (16)$$

В пределе  $a \rightarrow \infty$  можно пренебречь  $i/a$ , откуда следуют известные формулы для коэффициентов отражения и прохождения для однородной среды [1]. Взяв временную зависимость полей в виде  $\exp(-i\omega t)$ , мы имеем дело с комплексными величинами. Для перехода к физическим величинам надо брать от комплексных величин действительную часть.

Приступим к вычислению коэффициентов отражения  $r_o$  и прохождения  $r_{п}$ . Для этого сначала запишем следующее выражение для вектора  $\vec{S}$ :  $\vec{S} = c\vec{E} \times \vec{B}$ , который назовем потоком электромагнитной волны. С точностью до множителя, одина-

кового в любых средах, это есть вектор Пойтинга [1]. В выбранной нами системе координат имеем только одну ненулевую компоненту:  $S = cEB$ . Это выражение необходимо усреднить по времени:  $S = \langle cEB \rangle$ . Кроме того, поскольку имеем дело с комплексными величинами, то  $S$  необходимо заменить на следующее выражение [9]:

$$S = \frac{c}{2} \langle EB^* + E^*B \rangle. \quad (17)$$

Звездочка означает комплексное сопряжение. Подставляя в (17) функции (9) и (12), находим сначала поток падающей волны

$$S_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, \quad (18)$$

а затем и поток отраженной волны

$$S_A = \sqrt{\varepsilon_1} |A|^2. \quad (19)$$

Аналогично, используя (13) и (14), находим поток прошедшей волны

$$S_R = \sqrt{\varepsilon_c} |R|^2. \quad (20)$$

Теперь обычным образом находим коэффициент отражения  $r_o$

$$r_o = \frac{S_A}{S_1} = |A|^2 \quad (21)$$

или

$$r_o = \frac{(k_1 - k_c)^2 + 1/a^2}{(k_1 + k_c)^2 + 1/a^2} = \frac{(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_c})^2 + c^2/\omega^2 a^2}{(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_c})^2 + c^2/\omega^2 a^2}$$

и коэффициент прохождения  $r_{п}$

$$r_{п} = \frac{S_R}{S_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_1}} |R|^2 \quad (22)$$

или

$$r_{п} = \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_1}} \frac{4k_1^2}{(k_1 + k_c)^2 + 1/a^2} = \frac{4\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_c}}{(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_c})^2 + c^2/\omega^2 a^2}.$$

Причем из (21) и (22) следует, что  $r_o + r_{п} = 1$ , как и должно быть.

## 3. ГРАДИЕНТНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ СРЕДА КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Пусть плоская градиентная среда представляет собой слой толщиной  $h$ , который разделяет две однородные среды с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  (рис. 2). Считаем, что волна падает нормально из среды со значением  $\varepsilon_1$  и частично проходит сквозь градиентный слой в среду со значением  $\varepsilon_2$ . Для определенности примем, что  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ . Для обратного случая  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  в формуле (5) достаточно поменять знак параметра градиентности  $a$ . При создании искусственных материалов с задан-

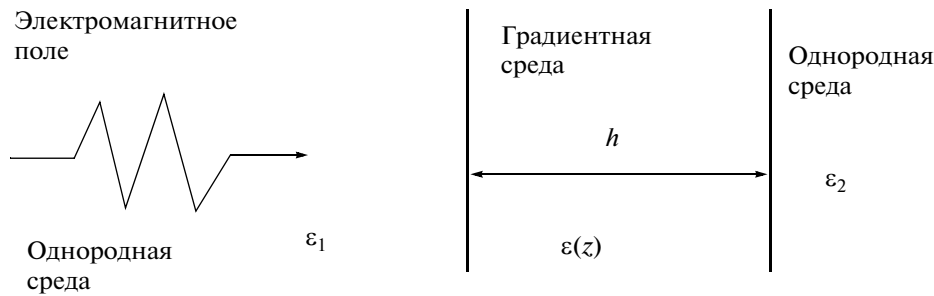


Рис. 1. Градиентный слой конечной толщины, на который слева нормально падает электромагнитная волна.

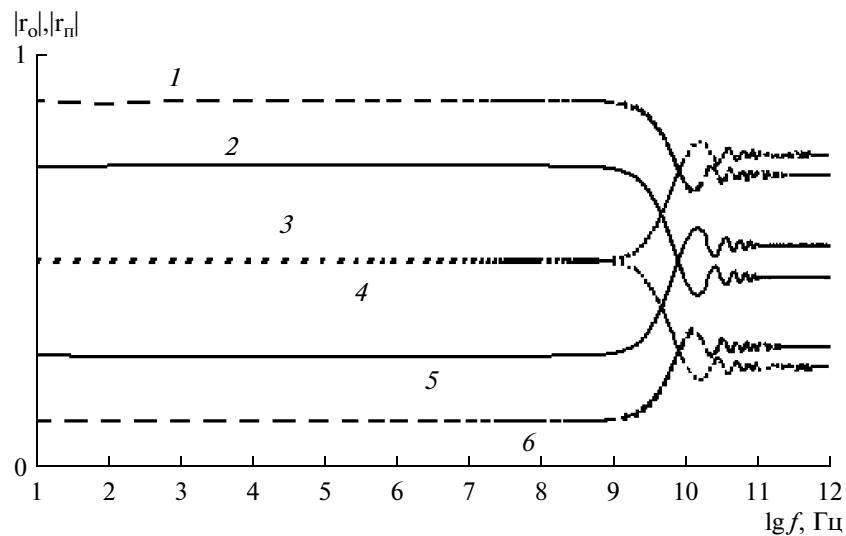


Рис. 2. Частотные характеристики модулей коэффициентов прохождения  $|r_{пл}|$  (1–3) и отражения  $|r_{ол}|$  (4–6) при  $a = 0.023$  м (сплошная),  $a = 0.033$  м (штриховая),  $a = 0.017$  м (пунктирная).

ными значениями диэлектрических проницаемостей  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  параметр градиентности  $a$  всегда можно выбрать таким, чтобы он не принимал близкого значения, равным толщине слоя  $h$ . Этим обеспечивается отсутствие расходимости в выражении  $1/(a - h)$ .

Электрическое поле в градиентной среде будет иметь следующий вид:

$$E = \frac{a - z}{a} U \exp\left(ik_c \frac{a^2}{a - z} - ik_c a\right) + \frac{a - z}{a} W \exp\left(-ik_c \frac{a^2}{a - z} + ik_c a\right), \quad (23)$$

где  $U$  – амплитуда распространения электрического поля в слое,  $W$  – амплитуда отражения электрического поля от нижней границы слоя. В пределе  $a \rightarrow \infty$  получаем выражение для поля в однородной слоистой среде [1]. Амплитуды отражения  $A$  и прохождения  $R$  сохраняют свой физический смысл, только они примут отличные от

(15) и (16) выражения. Из (11) находим магнитную индукцию в слое:

$$B = \frac{1}{\omega a} \left( i + \frac{k_c a^2}{a - z} \right) U \exp\left(ik_c \frac{a^2}{a - z} - ik_c a\right) + \frac{1}{\omega a} \left( i - \frac{k_c a^2}{a - z} \right) W \exp\left(-ik_c \frac{a^2}{a - z} + ik_c a\right). \quad (24)$$

Для прошедшего сквозь слой во вторую диэлектрическую среду электрического поля  $E_2$  получаем выражение

$$E_2 = R \exp(ik_2 z - ik_2 h), \quad (25)$$

где  $k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2}$ . Магнитная индукция во второй однородной среде вычисляется по формуле (11). Для нее получаем

$$B_2 = \frac{k_2}{\omega} R \exp(ik_2 z - ik_2 h). \quad (26)$$

Из граничного условия на верхней и нижней границах градиентного слоя следует система из че-

тырех уравнений для определения амплитуд  $A$ ,  $U$ ,  $W$  и  $R$ :

$$\begin{aligned}
 1 + A &= U + W, \\
 k_1 a(1 - A) &= (i + k_c a)U + (i - k_c a)W, \\
 R &= \frac{a - h}{a} U \exp\left(\frac{ik_c a h}{a - h}\right) + \frac{a - h}{a} W \exp\left(-\frac{ik_c a h}{a - h}\right), \\
 k_2 a R &= \left(i + \frac{k_c a^2}{a - h}\right) U \exp\left(\frac{ik_c a h}{a - h}\right) \times \\
 &\times \left(i - \frac{k_c a^2}{a - h}\right) W \exp\left(-\frac{ik_c a h}{a - h}\right).
 \end{aligned}$$

Введем параметры:

$$a_1 = \frac{i + k_c a}{k_1 a}, \quad a_2 = \frac{i - k_c a}{k_1 a}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 n &= \exp\left(\frac{ik_c a h}{a - h}\right), \\
 \Delta &= (1 + a_1)(b_2 - d_2) - (1 + a_2)(b_1 - d_1),
 \end{aligned} \quad (28)$$

$$b_1 = \frac{a - h}{a} n, \quad b_2 = \frac{a - h}{a} \frac{1}{n}, \quad (29)$$

$$d_1 = \frac{i + \frac{k_c a^2}{a - h}}{k_2 a} n, \quad d_2 = \frac{i - \frac{k_c a^2}{a - h}}{k_2 a} \frac{1}{n}. \quad (30)$$

Тогда решение системы уравнений для амплитуд будут следующим:

$$A = \frac{(1 - a_1)(b_2 - d_2) - (1 - a_2)(b_1 - d_1)}{\Delta}, \quad (31)$$

$$V = \frac{2(b_2 - d_2)}{\Delta}, \quad W = -\frac{2(b_1 - d_1)}{\Delta}, \quad (32)$$

$$R = 2 \frac{-b_1 d_2 + b_2 d_1}{\Delta} = \frac{4k_c}{k_2 \Delta}. \quad (33)$$

Приведенная нами запись решения для амплитуд представляется наиболее пригодной при численном расчете. Выписывать громоздкие выражения для амплитуд в явном виде вряд ли представляется удобным. Так, например,

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \left(1 + \frac{1 + k_c a}{k_1 a}\right) \left(\frac{a - h}{a} - \frac{1 - \frac{k_c a^2}{a - h}}{k_2 a}\right) \exp\left(-i \frac{k_c a h}{a - h}\right) - \\
 &- \left(1 + \frac{1 - k_c a}{k_1 a}\right) \left(\frac{a - h}{a} - \frac{1 + \frac{k_c a^2}{a - h}}{k_2 a}\right) \exp\left(i \frac{k_c a h}{a - h}\right).
 \end{aligned}$$

Подставляя в (17) выражения (9) и (12), для коэффициента отражения получаем формулу (21):

$$r_o = |A|^2,$$

только амплитуда  $A$  дается выражением (31). Аналогично, подставляя в (17) выражения (25) и (26), для коэффициента прохождения получаем следующее выражение:

$$r_n = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} |R|^2, \quad (34)$$

где амплитуда  $R$  дается выражением (33). Можно показать, что в пределе  $a \rightarrow \infty$  и случае  $\varepsilon_1 = 1$  и  $\varepsilon_2 = 1$  для коэффициентов отражения и прохождения получаем результат [10]. Так, например, для амплитуд  $A$  и  $R$  в этом случае получим:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{(1 - \varepsilon_c) \exp(-i\omega h \sqrt{\varepsilon_c}/c) - (1 - \varepsilon_c) \exp(i\omega h \sqrt{\varepsilon_c}/c)}{(1 + \sqrt{\varepsilon_c})^2 \exp(-i\omega h \sqrt{\varepsilon_c}/c) - (1 - \sqrt{\varepsilon_c})^2 \exp(i\omega h \sqrt{\varepsilon_c}/c)}, \\
 R &= \frac{4\sqrt{\varepsilon_c}}{(1 + \sqrt{\varepsilon_c})^2 \exp(-i\omega h \sqrt{\varepsilon_c}/c) - (1 - \sqrt{\varepsilon_c})^2 \exp(i\omega h \sqrt{\varepsilon_c}/c)}.
 \end{aligned}$$

Также можно проверить, после громоздких алгебраических вычислений, что

$$r_o + r_n = 1. \quad (35)$$

На рис. 2–3 представлены рассчитанные с использованием формул (27)–(34) графики частотных характеристик модулей коэффициентов прохождения и отражения и соответствующих фаз. Были выбраны следующие параметры:

для коэффициентов отражения (кривая 2) и прохождения (5) при  $a = 0.023$  м (рис. 2) –

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_c = 1, \quad \varepsilon_2 = 10, \quad h = 0.01 \text{ м},$$

для коэффициентов отражения (кривая 1) и прохождения (6) при  $a = 0.033$  м (рис. 2) –

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_c = 1, \quad \varepsilon_2 = 40, \quad h = 0.01 \text{ м},$$

для точечной линии (кривые 3 и 4 на рис. 2) –

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_c = 1, \quad \varepsilon_2 = 33, \quad h = 0.01 \text{ м}, \quad a = 0.017 \text{ м}.$$

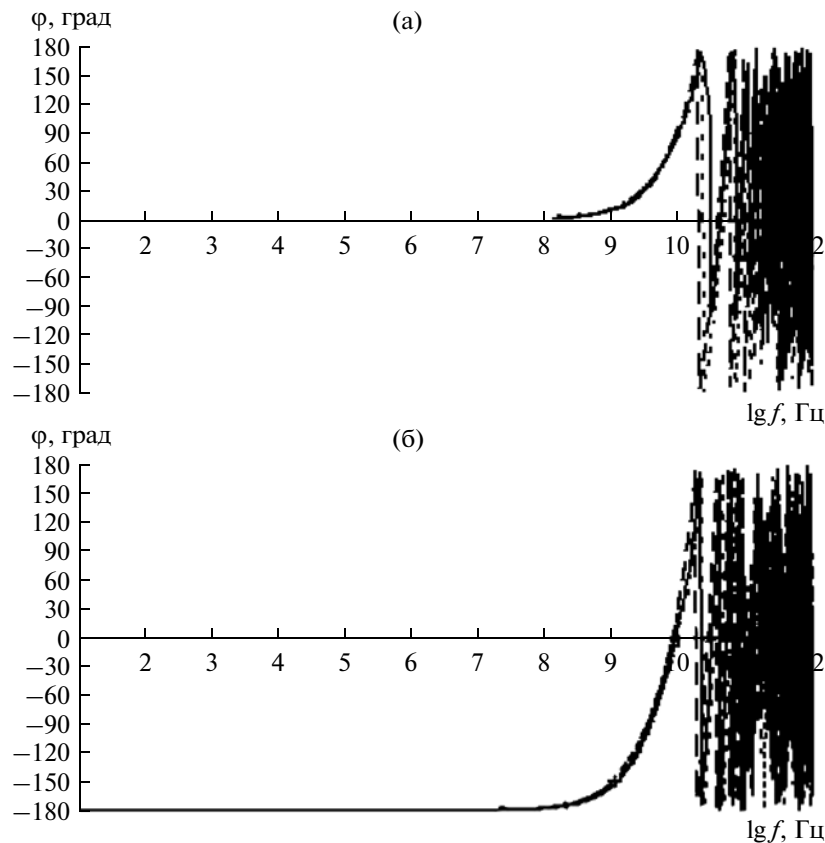


Рис. 3. Частотные характеристики фазы коэффициентов прохождения (а) и отражения (б) для различных значений параметра градиентности (линии как на рис. 2).

Анализ рис. 2–3 приводит к следующим выводам.

В широком частотном диапазоне (при указанных параметрах от 1 до  $10^9$  Гц) коэффициенты прохождения и отражения (их модули и фазы) имеют постоянные значения. При увеличении параметра градиентности величина коэффициента прохождения увеличивается, соответственно величина коэффициента отражения уменьшается. Вместе с тем фазы коэффициентов прохождения и отражения практически не меняются. Такое поведение указывает на то, что в широком частотном диапазоне рассматриваемый градиентный слой может служить фильтром низких частот и фазовращателем на  $180^\circ$  в радиотехнических устройствах для широкополосных сигналов. Отметим также, что подбирая параметр градиентности  $a$ , можно создавать слои как делители электромагнитного поля на заданное число. Например, половина волны проходит сквозь слой, а другая половина отражается от слоя (точечная линия на рис. 2).

Начиная с частоты  $f \approx 10^9$  Гц коэффициенты прохождения и отражения (их модули и фазы) начинают интенсивно осциллировать. Это связано с тем, что на такой частоте длина волны сравнива-

ется с толщиной переходного слоя. Действительно, если  $c$  — скорость света, то на частоте  $f \approx 10^9$  Гц длина волны

$$\lambda = c/f \approx 10^{-2} \text{ м,}$$

что совпадает с  $h = 0.01$  м.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен расчет коэффициентов отражения и прохождения плоской электромагнитной волны от плоскопараллельного градиентного диэлектрического слоя. Рассмотрена модель с такой градиентной зависимостью диэлектрической проницаемости, для которой результаты вычислений получены в конечном аналитическом виде. Для градиентного слоя введен параметр градиентности, меняя который, можно варьировать полосу пропускания и уровни коэффициентов прохождения и отражения. Такая электродинамическая структура переходного слоя со специально подобранными электрическими параметрами и толщиной может служить согласующим элементом типа фильтра низких частот и фазовращателем на  $180^\circ$  в радиотехнических устройствах при переда-

че широкополосных и сверхширокополосных сигналов.

Работа поддержана интеграционным проектом № 11 СО РАН.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неганов В.А., Осипов О.В., Раевский С.Б., Яровой Г.П.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Радио и связь, 2005.
2. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика неоднородных сред. Т. 1. Основы теории отражения и распространения звука. М.: Наука, 2007.
3. *Гаврилин В.В., Григулис Ю.И., Пориньш В.М.* Электромагнитные радиоволновые приборы для контроля слоев полупроводниковых и металлических структур. Рига: Зинатие, 1982.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
5. *Гантимуров А.Г., Башкуев Ю.Б.* // РЭ, 2008. Т. 53. № 7. С. 835.
6. *Шварицбург А.Б.* // Успехи физ. наук. 2000. Т. 170. № 12. С. 1297.
7. *Юшкова О.В.* // РЭ. 2010. Т. 55. № 1. С. 40.
8. *Давидович М.В.* // РЭ. 2010. Т. 55. № 1. С. 25.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
10. *Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // РЭ. 2009. Т. 54. № 5. С. 517.