

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 538.566

ДВУХМЕРНАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДЛИННЫХ  
И СРЕДНИХ РАДИОВОЛН НАД НЕОДНОРОДНЫМИ ТРАССАМИ

© 2013 г. М. Г. Дембелов<sup>1</sup>, Ю. Б. Башкуев<sup>1</sup>, А. А. Пылаев<sup>2</sup>, Л. Г. Тамкун<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт физического материаловедения СО РАН,  
Российская Федерация, 670047 Улан-Удэ, ул. Сахьяновой, 6  
E-mail: mdembelov@yandex.ru

<sup>2</sup>НИИ Радиофизики Санкт-Петербургского государственного университета,  
Российская Федерация, 198504 Санкт-Петербург, Петергоф,  
Ульяновская ул., 1

Поступила в редакцию 04.05.2012 г.

Рассмотрена двухмерная модель радиотрассы для поля вертикального электрического диполя над земной поверхностью. Компоненты поля на границе раздела сред подчиняются граничным условиям Леонтовича. Предложено вычислять функцию ослабления поля “земной” волны по квадратурной формуле, учитывающей неоднородности трассы в пределах нескольких первых зон Френеля. Приведены модельные расчеты модуля и аргумента функции ослабления.

DOI: 10.7868/S0033849413040062

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается поле вертикального электрического диполя над поверхностью Земли, используется гармоническая зависимость от времени  $\exp(-i\omega t)$ . Распространение “земных” волн, не испытавших влияния ионосферы, представляет интерес на относительно небольших расстояниях, когда влиянием на поле отраженных от ионосферы волн можно пренебречь. Приемник и источник расположены на поверхности Земли. Будем пренебрегать переотражением от границ раздела электрических неоднородностей, а также деполяризацией. Считаем, что граница начального однородного в электрическом и геометрическом отношении участка, на котором можно использовать модель “плоской” поверхности Земли, находится не ближе пяти длин волн от точки источника.

Учет влияния локальной неоднородности островного вида на процесс распространения поля остается актуальной задачей в теории распространения радиоволн. Неоднородность островного вида представляет собой электрическую или геометрическую нерегулярность, ограниченную в продольном и поперечном направлениях радиотрассы. Особенно актуальна такая задача стоит при прогнозировании поля “земной” волны в реальных условиях, когда учет поперечных размеров неоднородностей на земной поверхности оказывается существенным фактором, определяющим точность работы навигационных систем. В

качестве неоднородностей, учитываемых в данной работе, могут быть резко отличающиеся в электрическом и геометрическом отношении площадные импедансные участки, лесные массивы, горы, а также различные электрические неоднородности, вызванные, например, изменением сезонных условий. На практике подобные нерегулярности могут встречаться также в задачах радиолокации, моделирующих реальную двухмернуюстилающую среду, в электромагнитной дефектоскопии, разведочной геофизике и других областях, где используются электромагнитные поля с присутствием двухмерных рассеивателей различной физической природы.

В работах, посвященных проблеме распространения радиоволн над неоднородными средами, электрические и геометрические неоднородности, как правило, изменяются только вдоль направления распространения. В таком случае представляется возможным аналитически осуществить интегрирование двухмерного интегрального уравнения Кирхгофа для функции ослабления [1] по поперечной координате и свести его к одномерному виду с помощью метода стационарной фазы [2]. Но в некоторых случаях пренебрежение неоднородностями, находящимися в стороне от линии трассы распространения, может привести к неточностям прогнозирования поля.

Двухмерная задача распространения над земной поверхностью рассмотрена в работе [3]. В этой работе двухмерное интегральное уравнение,

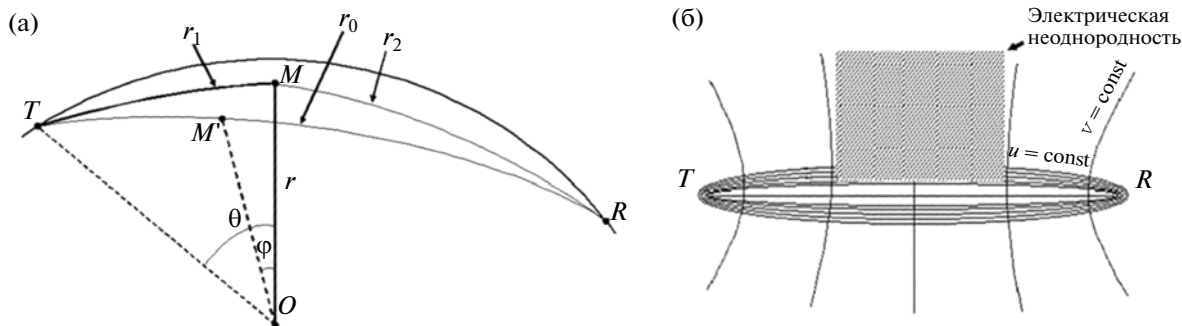


Рис. 1. Геометрия задачи (а); эллиптические координаты  $(u, v)$  (б).

которое впервые получил Е.Л. Фейнберг [4], было напрямую сведено к системе алгебраических уравнений. Такое решение не представляется удобным и пригодным для трасс в реальных условиях, так как является слишком громоздким.

Следуя работе [5], нами рассматривается случай распределения неоднородностей на сферической поверхности Земли. Интегрирование по поперечной координате будет проводиться в масштабе номеров зон Френеля. Численное решение представляется в виде совокупности одномерных функций ослабления, рассчитанных на основе интегрального уравнения Хаффорда [2].

В работах [6, 7] исследуется трехмерная задача с крупномасштабной локальной импедансной неоднородностью в волноводе “Земля–ионосфера”. Автор рассматривает площадное распределение импеданса со стороны нижней стенки волновода для модели “плоской” поверхности Земли. Предложенная нами численная методика также может быть использована для рассмотрения поля в подобном трехмерном волноводе.

### 1. ДВУХМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КИРХГОФА

Рассматривается задача о поле вертикального электрического диполя, расположенного на сферической поверхности Земли. Сферическая система координат  $(r, \theta, \varphi)$  вводится с началом в центре сферы, полярная ось проходит через источник. Вводится однокомпонентный вектор Герца  $\vec{\Pi} = \Pi \vec{e}_r$ , где  $\vec{e}_r$  – радиальный единичный вектор. Скалярная функция  $\Pi$  удовлетворяет скалярному волновому уравнению Гельмгольца

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = U$$

( $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число в вакууме,  $\lambda$  – длина волны,  $U$  – заданная функция, описывающая источник) и граничному условию вида

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial n} \right|_{z=0} = -ik \delta(M) \Pi,$$

где  $z$  – вертикальная координата;  $\delta$  – неоднородный по площади поверхностный импеданс в некоторой точке  $M$ , находящейся на земной поверхности;  $n$  – внешняя к поверхности Земли нормаль. Размеры неровностей трассы удовлетворяют условию малости относительно длины волны:  $kh_0 < 1$ , где  $h_0$  – высота препятствия относительно нулевого уровня  $r = a$ , где  $a = 6370$  км – радиус Земли. Функция ослабления вводится соотношением

$$\Pi(r_0) = W(r_0) \frac{\exp(ikr_0)}{r_0},$$

где  $r_0$  – расстояние от источника до точки наблюдения вдоль земной поверхности.

Исходя из интегральной формулы Грина для однокомпонентного вектора Герца, запишем двухмерное интегральное уравнение для функции ослабления  $W$  в виде [2]

$$W(r_0) = 1 + \frac{ik}{2\pi} \int_S W(r_1) \exp[ik(r_1 + r_2 - r_0)] \left[ \delta + \frac{\partial r_2}{\partial n} \right] \frac{r_0}{r_1 r_2} dS, \quad (1)$$

здесь  $r_1$  – расстояние вдоль земной поверхности между источником и текущей точкой интегрирования,  $r_2$  – расстояние вдоль земной поверхности между приемником и точкой интегрирования (рис. 1а). Функция Грина выбрана в виде  $\tau = \exp(ikr_2)/r_2$ .

Для удобства будем проводить анализ в эллиптических координатах  $(u, v)$ , вводимых следующим образом:

$$\frac{r_1 + r_2}{r_0} = \operatorname{ch} u, \quad \frac{r_1 - r_2}{r_0} = \cos v. \quad (2)$$

В данном случае координатные линии  $u = \operatorname{const}$  соответствуют границам зон Френеля. Координатные линии  $v = \operatorname{const}$  ортогональны линиям  $u = \operatorname{const}$  (рис. 1б). При этом  $-\infty < u < \infty, 0 \leq v \leq \pi$ .

В эллиптических переменных элемент поверхности будет иметь вид

$$dS = \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} r_1 r_2 du dv, \quad (3)$$

где  $\theta_0$  — угол вдоль поверхности Земли между источником и приемником. Эта формула получается для случая малой кривизны Земли, когда предполагается возможность применения теоремы косинусов для треугольника, расположенного на сфере. При учете соотношений (2) и (3) уравнение (1) примет вид

$$W(r_0) = 1 + \frac{ikr_0}{2\pi} \int_u \exp(ikr_0(chu - 1)) du \times \\ \times \int_v W(r_1) \left[ \delta + \frac{\partial r_2}{\partial n} \right] \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} dv. \quad (4)$$

При отсутствии зависимости  $\delta$  от поперечной координаты уравнение (4) с использованием метода стационарной фазы приводится к известному одномерному интегральному уравнению Хаффорда [2]:

$$W(r_0) = 1 + \\ + i \sqrt{\frac{ikr_0}{2\pi}} \int_0^\pi W\left(\frac{r_0}{2}(1 - \cos v)\right) \left[ \delta(r_1) + \frac{\partial r_2}{\partial n} \right] \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} dv. \quad (5)$$

Если импеданс  $\delta$  зависит как от продольной, так и поперечной координаты, то в этом случае нельзя воспользоваться полным методом стационарной фазы и получить строгое решение уравнения (4). Будем решать его методом последовательных приближений. Для этого всю область интегрирования по продольной координате  $u$  разобьем на ряд подобластей и будем считать, что неизвестная двумерная функция ослабления в данной подобласти равна соответствующей одномерной функции ослабления. Проинтегрировав по всем подобластям, получим решение двумерной задачи в первом приближении.

Следуя работе [5], примем во внимание следующие приближенные соотношения:

$$r_1 \approx r_0 chu(1 - \cos v)/2, \quad (6)$$

$$r_2 \approx r_0 chu(1 + \cos v)/2. \quad (7)$$

Можно показать, что они справедливы в основной части области интегрирования, кроме зон вблизи корреспондентов при расположении этих зон в стороне от классической трассы — линии, соединяющей передатчик и приемник.

Учитывая соотношения (6) и (7) и выражая внутренний интеграл в уравнении (4) через одномерную функцию ослабления  $W(r_0 chu)$  (5), мож-

но прийти к приближенному решению двумерного интегрального уравнения Кирхгофа (1):

$$W(r_0) = 1 + \\ + \sqrt{\frac{ikr_0}{2\pi}} \int_u \exp[ikr_0(chu - 1)] [W(r_0 chu) - 1] \frac{1}{i\sqrt{chu}} du, \quad (8)$$

где  $W(r_0 chu)$  — одномерная функция ослабления, соответствующая координатной линии  $u = \text{const}$ .

## 2. КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА

В интеграле уравнения (8) произведем замену переменной  $chu - 1 = \frac{\lambda}{4r_0} y^2$  ( $\lambda$  — длина волны), тогда уравнение (8) примет вид

$$1 - W(r_0) = \frac{1}{\sqrt{2i}} \int_Y F(y) [1 - W(r_0, y)] K(y) dy, \quad (9)$$

где  $F(y) = \exp\left(i \frac{\pi}{2} y^2\right)$  — стандартная подынтегральная функция интеграла Френеля, а  $K(y)$  — так называемый корректирующий множитель. Если ввести обозначение  $z = \lambda/4r_0$ , то получим

$$K(y) = \frac{1 + 0.5y^2 z}{\sqrt{1 + y^2 z}}.$$

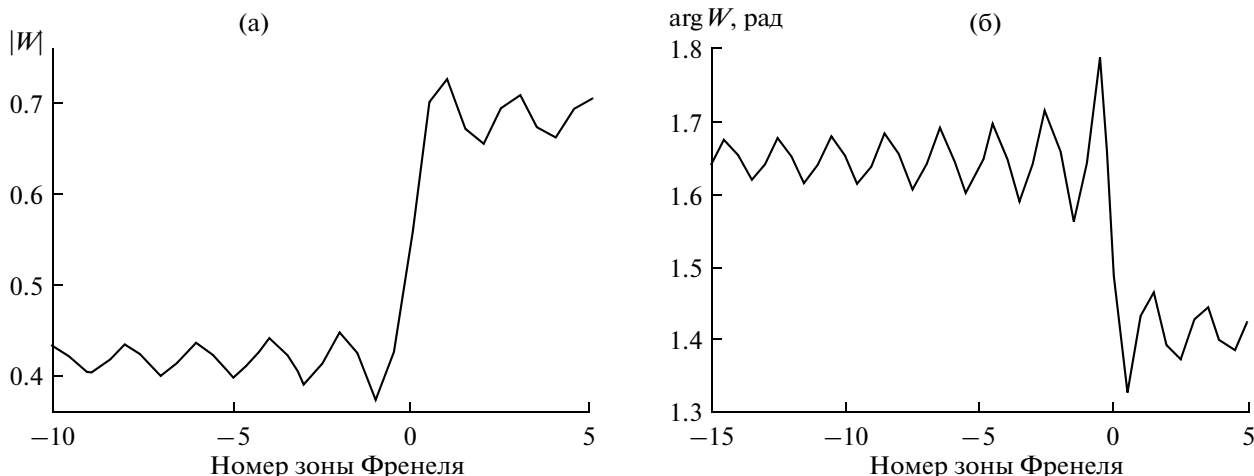
Существенные значения  $y$ , обусловленные свойствами интеграла Френеля, не превышают нескольких единиц, а параметр  $z$  будем считать много меньшим единицы. Реализованная замена переменных есть переход от эллиптической координаты “ $u$ ” к квазиэллиптической координате “ $y$ ”. С учетом существенной при распространении области  $|u| < 1$  имеем  $y \approx u \sqrt{2r_0/\lambda}$ .

Как сказано выше, принимаем такую физическую модель, в которой рабочую зону можно разбить на ограниченное число участков с одинаковыми по поперечной координате электрическими и геометрическими свойствами. Тогда, учитывая слабую зависимость корректирующего множителя  $K(y)$  от координаты “ $y$ ”, интеграл в уравнении (9) запишем как сумму интегралов по отдельным участкам (полосам) и вынесем средние значения медленно меняющихся множителей каждой полосы из-под знака интеграла. Обозначим их как  $R_j = K_j(1 - W_j)$ , где  $j$  — номер полосы. Тогда уравнение (9) запишется в виде

$$[1 - W(r_0)] = \frac{1}{\sqrt{2i}} \sum_j R_j [Z(y_j) - Z(y_{j-1})]. \quad (10)$$

Здесь  $Z(y_j) = \int_0^{y_j} \exp\left(i \frac{\pi}{2} y^2\right) dy$  — интеграл Френеля.

Суммирование выполняется до тех пор (до тех номеров полос), пока оно не перестанет влиять на результат при заданной точности вычислений.



**Рис. 2.** Графики модуля (а) и аргумента (б) функции ослабления при продвижении неоднородности в виде полубесконечной полосы с электрическими параметрами  $\epsilon = 5$ ,  $\sigma = 0.5$  мСм/м от отрицательных значений номеров зон Френеля к положительным.

Как указывалось выше, благодаря свойствам интеграла Френеля и, соответственно, ограниченности значений  $y$  в существенной области интегрирования, а также малости параметра  $z$ , корректирующий множитель  $K(y)$  практически равен единице, и поэтому формула (10) окончательно примет вид

$$[1 - W(r_0)] = \frac{1}{\sqrt{2i}} \sum_j [1 - W_j] [Z(y_j) - Z(y_{j-1})]. \quad (11)$$

Отметим, что данное выражение допускает строгий предельный аналитический переход к любым структурам, произвольно неоднородным по горизонтальной (продольной) координате и однородным по вертикальной (поперечной).

В качестве поперечной координаты удобно выбрать номер зоны Френеля  $m$ . Пусть это будет такой номер, при котором фаза Френеля изменяется на  $m\pi$ , т.е.  $y = \sqrt{2m}$ . Можно легко показать, что это будет соответствовать смещению реальной поперечной координаты в центре трассы на величину  $h = 0.5\sqrt{m\lambda D}$ , где  $D$  – длина трассы.

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

По предложенной формуле (11) были проведены расчеты функции ослабления для некоторых модельных радиотрасс с неоднородным по площади импедансом. В качестве первого численного примера была выбрана радиотрасса на частоте 200 кГц протяженностью 200 км с полубесконечной неоднородностью – полосой шириной 50 км (см. рис. 1б). Диэлектрическая проницаемость и проводимость основной части рассматриваемой области интегрирования выбраны равными  $\epsilon = 20$ ,  $\sigma = 10$  мСм/м. В стандартном варианте полоса размещалась симметрично относительно центра

геодезической линии между передатчиком и приемником и имела параметры неоднородности (зона плохой проводимости)  $\epsilon = 5$ ,  $\sigma = 0.5$  мСм/м. Указанная полоса постепенно перекрывает поперек радиотрассу. Перекрытие области интегрирования начинается от отрицательных значений номеров зон Френеля к положительным. На рис. 2 показана зависимость модуля и аргумента функции ослабления от размера области перекрытия; нулевой линией является линия, соответствующая так называемой стационарной точке, когда граница полосы совпадает с линией передатчик–приемник. Для рассматриваемого случая с длинами кусков неоднородной трассы  $d_1 = 75$  км,  $d_2 = 50$  км,  $d_3 = 75$  км ширина первой зоны Френеля оказывается равной 8.7 км.

Как и следовало ожидать, эти зависимости в соответствии с концепцией зон Френеля носят осциллирующий характер. Период осцилляций равен двум зонам. При увеличении номера зоны Френеля в отрицательную или положительную сторону значения амплитуды и фазы стремятся к однородным случаям для однокусочной и трехкусочной трасс соответственно, а в области значений  $m = -1...0...1$  наблюдаются резкие изменения модуля и особенно аргумента функции ослабления. Это подтверждает известное условие о том, что первая зона Френеля вносит наиболее существенный вклад в процесс распространения радиоволн.

Наиболее важной для практики является точность прогноза параметров электромагнитного поля. При этом возникает вопрос: в каких случаях следует учитывать двухмерную неоднородность и когда ею можно пренебречь? Точность прогноза модуля (амплитуды) функции ослабления заддим в пределах  $\pm 5\%$ , а прогноза аргумента (фазы)  $\pm 0.03$  рад. Помимо приведенных расчетов, вы-

## Номера учитываемых зон Френеля

$\sigma$ , См/м	Прогноз амплитуды		Прогноз фазы	
	Номер зоны входа полосы	Номер зоны выхода полосы	Номер зоны входа полосы	Номер зоны выхода полосы
$10^{-4}$ $5 \times 10^{-4}$	-6	+2	-16	+4
	-4	+1	-12	+3
$10^{-4}$ $5 \times 10^{-4}$	-8	+2	-22	+5
	-4	+2	-12	+3

полненных для модели с полубесконечной полосой, были сделаны расчеты для несимметрично расположенной полосы (полоса приближена к одному из корреспондентов на 30 км), а также для полосы с несколько худшей проводимостью. Все данные приведены в таблице, где показано допустимое число зон Френеля, когда необходим переход от одномерного случая к двухмерному.

Из таблицы следует, что трасса начинает “чувствовать” полосу, когда последняя находится на расстоянии 12...22 зоны Френеля от геодезической линии при фазовых измерениях и расстоянии 4...8 зон Френеля при амплитудных измерениях, где большие значения номеров зон Френеля относятся к полосе с худшей проводимостью.

Трасса перестает чувствовать влияние полосы при удалении от нее уже на расстоянии 2...4 зоны Френеля, т.е. значительно раньше. Это связано с тем, что основная часть рабочей зоны имеет проводимость во много раз большую, чем у полосы, и когда последняя освобождает область, существенную для распространения, потери при распространении радиоволны резко падают. Несимметричность расположения полосы хоть незначительно, но повышает требования к учету двухмерности.

В качестве второго численного примера рассмотрим результаты расчетов модуля и аргумента функции ослабления на радиовещательной частоте длинноволнового диапазона 279 кГц ( $\lambda = 1.08$  км) для реальной трассы юга Сибири, проходящей вдоль неоднородности в виде лесного массива, расположенного не на геодезической линии. Расстояние от края леса до геодезической линии, соединяющей передатчик и приемник, изменяется от  $1\lambda$  до  $7\lambda$ . Геоэлектрический разрез участка без учета леса представляет собой двухслойную структуру с параметрами  $\epsilon_1 = 10$ ,  $\sigma_1 = 3.16$  мСм/м,  $h_1 = 14.7$  м;  $\epsilon_2 = 10$ ,  $\sigma_2 = 6.8$  мСм/м,  $h_2 = \infty$ . Данному георазрезу соответствует поверхностный импеданс:  $|\delta| = 0.07$ ,  $\arg \delta = -47^\circ$  [8]. Лесной покров учитывается введением дополнительного лесослоя с электрическими параметрами  $\epsilon = 1.3$ ,  $\sigma = 1.9 \times 10^{-2}$  мСм/м и эффективной высотой деревьев  $h = 12.5$  м. В этом случае значение поверхностного импеданса становится:  $|\delta| = 0.13$ ,  $\arg \delta = -58^\circ$ . Первая зона Френеля имеет ширину 6.8 км.

Расчетные графики модуля функции ослабления (рис. 3а) показывают, что ослабление поля

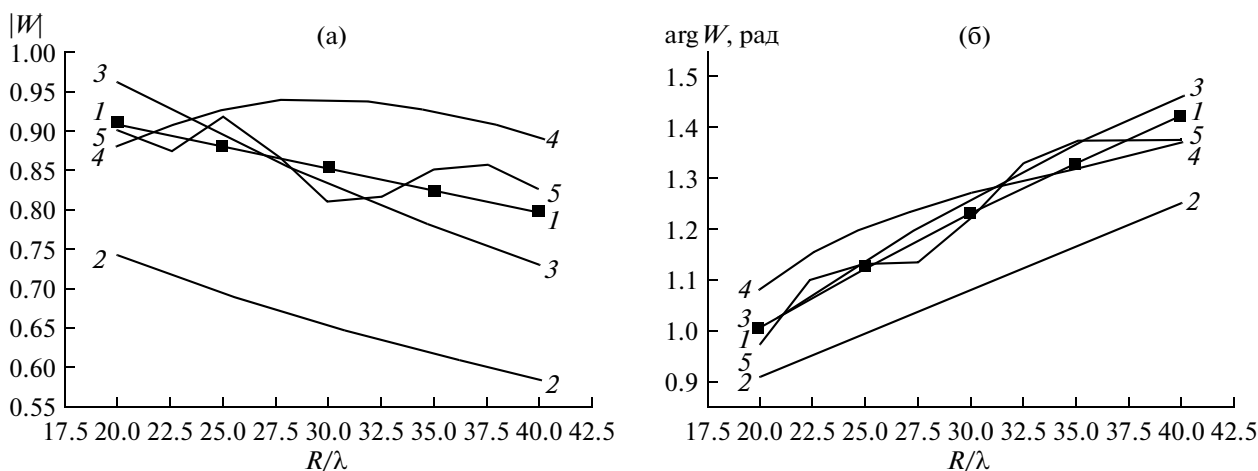


Рис. 3. Графики модуля (а) и аргумента (б) функции ослабления при распространении вдоль неоднородности в виде лесного массива на разных расстояниях от него: 1 – без учета двухмерной неоднородности; 2 –  $1\lambda$ ; 3 –  $2\lambda$ ; 4 –  $3\lambda$ ; 5 –  $7\lambda$ .

при распространении вдоль лесного массива на расстоянии  $1\lambda$  от геодезической линии будет больше на 30% относительно ослабления при распространении без учета неоднородности. По мере удаления от неоднородности, расположенной в стороне от геодезической линии, отличие заметно уменьшается, так как первая зона Френеля все в меньшей степени пересекает боковую неоднородность. Разность дополнительных фаз функции ослабления при  $R/\lambda = 40$  достигает 0.18 радиан. При удалениях на  $2\lambda$ ,  $3\lambda$  и  $7\lambda$  от неоднородности разность фаз не превышает 0.06 радиан (см. рис. 3б).

Таким образом, при точном прогнозировании характеристик амплитуды и фазы электромагнитных полей с учетом лесных массивов, расположенных в стороне от трассы, необходимо учитывать электрические неоднородности, находящиеся на расстоянии порядка одной длины волны от классической геодезической линии трассы распространения.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложено численное решение для двухмерной модели распространения длинных и средних радиоволн над неоднородными трассами, содержащими конечное число импедансных неоднородностей. Приведены численные результаты для двухмерной неоднородности в виде полубесконечной неоднородности с резко контрастными электрическими свойствами, пересекающей поперек

трассу распространения. Показано, что первая зона Френеля вносит наиболее существенный вклад в процесс распространения радиоволн. Для конкретной радиотрассы приведены условия, при которых необходимо учитывать двухмерную неоднородность для более точного прогнозирования поля земной волны.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Сибирского отделения Российской академии наук (интеграционный проект № 11) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-02-98002-Сибирь).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фейнберг Е.Л.* Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. М.: Физматлит, 1999.
2. *Hufford G.A.* // *Quart. J. Appl. Math.* 1952. V. 9. № 4. P. 391.
3. *De Jong D.* // *Radio Sci.* 1975. V. 10. № 11. P. 925.
4. *Feinberg E.L.* // *Nouvo Cimento Suppl.* 1959. V. 11. № 1. P. 60.
5. *Пылаев А.А., Тихомиров Н.П.* // Проблемы дифракции и распространения волн. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. Вып. 18. С. 155.
6. *Соловьев О.В.* // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1995. Т. 38. С. 785.
7. *Soloiev O.V., Hayakawa M., Molchanov O.A.* // *Physics and Chemistry of the Earth.* 2006. V. 31. Iss. 4–9. P. 428.
8. *Башкуев Ю.Б.* Электрические свойства природных слоистых сред. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1996.